

## ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СГУСТКОВ ЭЛЕКТРОНОВ В КРУГЛОМ ДИАФРАГМИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

А. П. Кулаго, И. С. Щедрин

*Рассмотрен круглый диафрагмированный волновод (КДВ), однородный по длине. Получены выражения для определения нагруженной добротности ячейки с потерями ( $Q_{H1}$ ), без потерь ( $Q_{H1}^0$ ) и нагруженной добротности  $Q_H$  секции длиной  $l$ . Получено выражение для определения электрической амплитуды поля излучения, создаваемое релятивистским сгустком с зарядом  $q$ , движущимся по оси КДВ с последовательным сопротивлением  $R_n$ . Проведен расчет энергии, мощности излучения пучка электронов и электронного КПД.*

**Ключевые слова:** круглый диафрагмированный волновод, последовательное сопротивление КДВ, ускорение (РЭС) сгустков релятивистских электронов, электронный КПД.

1. Традиционно расчет линейных ускорителей электронов (ЛУЭ) основан на уравнении распространения мощности в круглом диафрагмированном волноводе (КДВ). В предлагаемой работе расчет ЛУЭ впервые выполнен, исходя из уравнения суммы полей: ускоряющего поля СВЧ-генератора и суммарного поля излучения всех сгустков пучка.

Несколько слов о черенковском излучении в круглом диафрагмированном волноводе. В гладком круглом волноводе фазовая скорость электромагнитной волны всегда больше скорости света,  $\nu_{\Phi} > c$ . В КДВ фазовая скорость равна скорости ускоряемого электрона, и в релятивистском случае  $\nu_{\Phi} = c$ . Однако сдвиг фазы поля по длине КДВ

носит переменный характер (рис. 1):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda\beta_{\Phi}} \Delta z, \quad \text{где} \quad \beta_{\Phi} = \frac{\nu_{\Phi}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dz}{d\varphi}, \quad (1)$$

$$\nu_{\Phi} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{dz}{d\varphi} = \omega \frac{dz}{d\varphi}. \quad (2)$$

Фазовая скорость волны  $\nu_{\Phi} > c$  для середины кольца КДВ и  $\nu_{\Phi} < c$  для середины диафрагмы, так что условие для возникновения излучения П. А. Черенкова выполняется только в районе каждой диафрагмы. Для основной гармоники электромагнитного поля условие для возникновения черенковского излучения не выполняется, т.к. тогда  $\nu_{\Phi} = c$ .

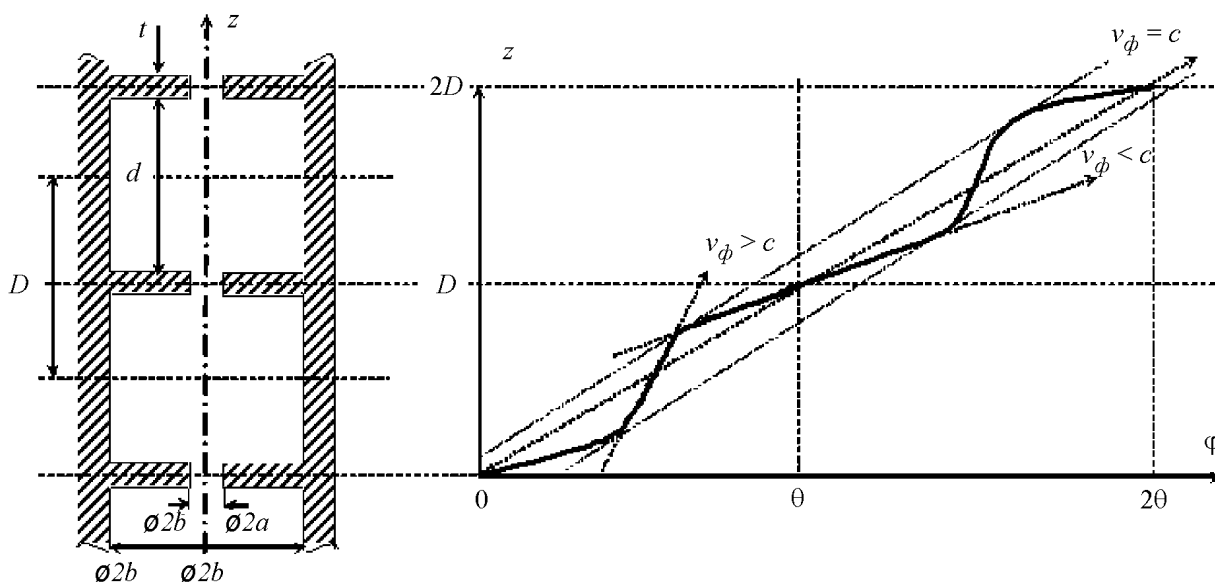


Рис. 1: Сдвиг фазы поля на оси КДВ в зависимости от  $z$ .

2. Рассмотрим иной подход к описанию излучения релятивистских сгустков в КДВ. Релятивистский сгусток электронов с зарядом  $q$ , движущийся по оси КДВ со скоростью, близкой к скорости света,  $\beta = 1$  ( $\beta = \nu/c$ ). Согласно теореме Вильсона [1, 2], энергия, теряемая движущимся сгустком с зарядом  $q$ , равна половине произведения заряда на наведенное им напряжение:  $W = \frac{1}{2} qU$ . Будем считать, что прирост  $\Delta U$  напряжения на длине  $\Delta x$  равен произведению наведенного зарядом  $q$  тока  $I$  на последовательное сопротивление отрезка КДВ,  $\Delta U = I \Delta R$ . Согласно теореме Рамо [3], наведенный ток равен  $I = qc/\Delta x$ . Будем определять сопротивление отрезка КДВ длины  $\Delta x$  через последовательное сопротивление КДВ  $R_{\Pi}$ :  $\Delta R = R_{\Pi}(\Delta x)^2 = (E^2/2P)(\Delta x)^2$ . Здесь  $E$  – напряженность электрической составляющей поля на оси КДВ,  $P$  – мощность.

Используя соотношения для  $W$ ,  $I$  и  $\Delta R$ , получим прирост теряемой сгустком энергии:

$$\Delta W = \frac{1}{2} q \Delta U = \frac{1}{2} q^2 c R_{\Pi} \Delta x. \quad (3)$$

Мощность, излучаемая сгустком, равна

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2} q^2 c R_{\Pi} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (4)$$

Т.к.  $\Delta x/\Delta t = c$ , в результате получаем

$$P = \frac{1}{2} q^2 c^2 R_{\Pi} = \frac{E^2}{2R_{\Pi}} \quad \text{или} \quad E = qcR_{\Pi}. \quad (5)$$

Таким образом, поле  $E$ , излучаемое релятивистским сгустком с зарядом  $q$ , определяется зарядом, скоростью и последовательным сопротивлением КДВ. Данное представление справедливо и для скорости сгустка  $\nu < c$ . В общем виде

$$E = q\nu R_{\Pi}. \quad (6)$$

Отметим, что аналогичное соотношение получено в работе [11].

3. Волновое сопротивление КДВ  $Z_0$  рассчитано для центра кольца между двумя диафрагмами [4]. Рассмотрим отрезок D КДВ (рис. 1) в виде двух половин колец и с диафрагмой посередине – одну ячейку КДВ. На виде колебаний  $\theta = \pi/2$  это будет четвертьволновый резонатор, а на виде колебаний  $\theta = 2\pi/3$  – третьволновый резонатор. Таким образом, КДВ на виде колебаний  $\theta = \pi/2$  представляет собой цепочку четвертьволновых проходных резонаторов, а КДВ на виде колебаний  $\theta = 2\pi/3$  – цепочку третьволновых проходных резонаторов. Нагруженная добротность подобного резонатора с двумя связями будет равна  $Q_{H1} = Q_0/(1 + \beta_1 + \beta_2)$ , где  $\beta_1 = \beta_2 = Z_0/r_D$  – коэффициенты связи с КДВ слева и справа,  $r_D$  – эквивалентное омическое сопротивление резонатора длины  $D$ ,  $Q_0$  – собственная добротность КДВ. Нагруженная добротность резонатора с длиной  $l_1 = \lambda$  равна  $Q_{H\lambda} = Q_{H1}(2\pi/\theta)$ .

Секция длиной  $l$  будет представлять собой проходной резонатор с нагруженной добротностью  $Q_H = Q_{H\lambda}l/\lambda = Q_{H1}(2\pi/\theta)l/\lambda$ , где  $\lambda$  – рабочая длина волны. По определению собственная добротность КДВ равна  $Q_0 = \omega L/r_D$ , поэтому  $Q_{H1} = \omega L/(r_D + 2Z_0)$ , где  $L$  – индуктивность резонатора. Если потерь нет или они чрезвычайно малы (сверхпроводящий вариант), то  $r_D = 0$  и  $Q_{H1}^0 = \omega L/2Z_0$ . Сравнивая выражения для  $Q_{H1}$  и  $Q_{H1}^0$ , получим соотношение  $(r_D + 2Z_0)Q_{H1} = 2Z_0Q_{H1}^0$ . Отметим, что на практике КДВ изготавливают из меди, и величина  $r_D \ll 2Z_0$ ; таким образом,  $Q_{H1}^0$  секции слабо отличается от  $Q_{H1}$  с потерями в случае использования меди.

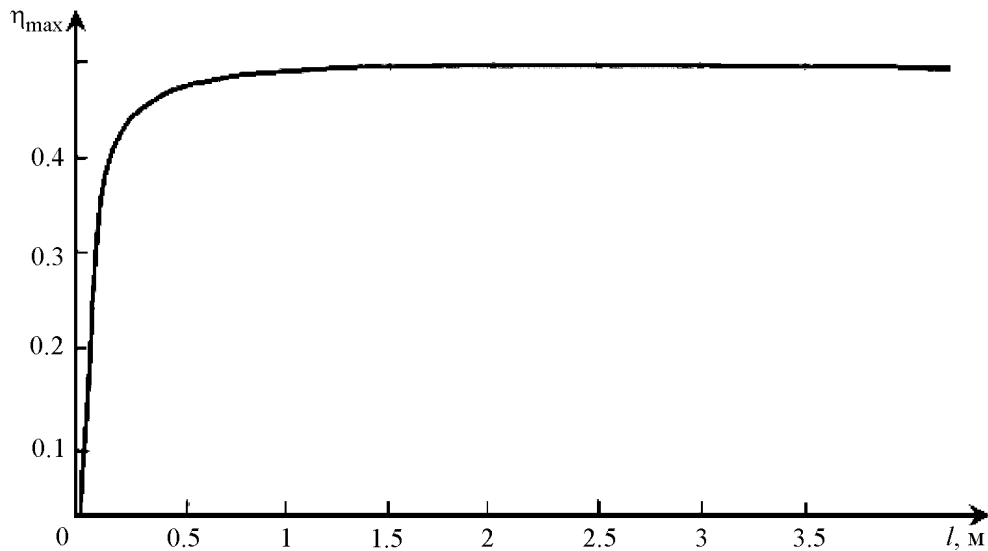


Рис. 2: Зависимость электронного КПД от длины секции КДВ.

4. Определим эквивалентное сопротивление  $r_D$ . Оно состоит из сопротивления  $r_d$  торцевой поверхности диафрагмы, сопротивления  $r_b$  поверхности отрезка круглого волновода радиуса  $b$  и сопротивления  $r_a$  цилиндрической поверхности отверстия в диафрагме радиуса  $a$ . Сопротивление  $r_d$  состоит из сопротивлений двух стенок радиуса от  $a$  до  $b$ , а сопротивление одной стенки равно  $r_{d1}$ , где

$$r_d = 2r_{d1} = 2 \frac{\rho}{2\pi\delta} \int_a^b \frac{dr}{r} = 2 \frac{\rho}{2\pi\delta} \ln \frac{b}{a}, \quad r_b = \frac{\rho}{2\pi\delta} \frac{d}{b}, \quad r_a = \frac{\rho}{2\pi\delta} \frac{t}{a}$$

и

$$r_D \approx \frac{\rho}{2\pi\delta} \left[ 0.867 \frac{b}{a} - 0.333 + \left( \frac{\theta}{2\pi} - \frac{t}{\lambda} \right) \frac{a/b}{a/\lambda} + \frac{t/\lambda}{a/\lambda} \right]. \quad (7)$$

Собственная добротность  $Q_0$  и волновое сопротивление КДВ  $Z_0$  даны в справочнике [4]. Нагруженная добротность ячейки может быть определена по формуле, приведенной выше. Например, для секции КДВ длиной  $l = 2$  м с  $\theta = \pi/2$ ,  $\lambda = 16.5$  см,  $a/\lambda = 0.20$ ,  $a/b = 0.47$  получаем  $Q_{H1} = 0.792$ , а нагруженная добротность равна  $Q_H = 38$ .

5. Релятивистский электронный сгусток излучает поле с амплитудой электрической составляющей, определенной по формуле (5). Амплитуда поля  $E$  за движущимся релятивистским сгустком электронов будет спадать по экспоненциальному закону,  $E = E_q \exp(-\omega t/2Q_H)$ . Здесь  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $t$  – текущее время. Выберем

произвольное начальное сечение в КДВ. Поле от пролета первого сгустка на рабочей частоте  $f = 1/T$  СВЧ-колебаний в КДВ уменьшится к моменту прилета второго сгустка как  $E = E_q \exp(-\omega T/2Q_H) = E_q \exp(-\pi/Q_H)$ . При влете  $N$ -го сгустка в выбранном сечении КДВ суммарное поле будет определяться выражением

$$E_N = E_q [1 - \exp(-N\pi/Q_H)] / [1 - \exp(-\pi/Q_H)]. \quad (8)$$

Для стационарного режима, когда  $N \rightarrow \infty$ , это выражение принимает вид

$$E_\infty = E_q / [1 - \exp(-\pi/Q_H)]. \quad (9)$$

Отметим, что для однородного КДВ суммарное поле излучения релятивистских сгустков после завершения переходного процесса будет постоянным по величине и не зависеть от продольной координаты  $z$ , т.к. выражение (9) получено для произвольно выбранного сечения.

6. Электромагнитные поля в КДВ создаются двумя источниками. СВЧ-генератор, питающий ускоряющую секцию, создает электромагнитное поле с напряженностью электрической составляющей на оси КДВ  $E_\Gamma = E_{\Gamma_0} e^{-\alpha z}$  [6, 7], где  $E_{\Gamma_0}$  – напряженность ускоряющего поля на входе ускоряющей секции,  $\alpha$  – коэффициент затухания КДВ,  $z$  – продольная координата. Вторым источником излучения является ускоряемый электронный пучок. Суммарное поле  $E_\Pi$ , излучаемое последовательной цепочкой точечных сгустков, имеющих заряд  $q$ , после окончания переходного процесса будет равно

$$E_\Pi = E_q / [1 - \exp(-\pi/Q_H)]. \quad (10)$$

Каждый сгусток находится в максимуме суммарного поля торможения всех сгустков и максимуме ускоряющего поля генератора:

$$E = E_{\Gamma_0} e^{-\alpha z} - E_q / [1 - \exp(-\pi/Q_H)]. \quad (11)$$

Энергия, приобретаемая каждым сгустком электронов на выходе ускоряющей секции длиной  $l$ , равна в вольтах

$$U = E_{\Gamma_0} l [1 - \exp(-\alpha l)] / (\alpha l) - E_q l / [1 - \exp(-\pi/Q_H)]. \quad (12)$$

Поскольку импульсный ток пучка можно записать в виде  $I = qc/\lambda$ , выражение для  $E_q$  принимает вид  $E_q = IR_\Pi \lambda$ . Мощность пучка ускоренных электронов равна  $P = IU$ . Электронный КПД ускоряющей секции соответственно равен

$$\eta = (1/P_0) \left[ IE_{\Gamma_0} l [1 - \exp(-\alpha l)] / (\alpha l) - I^2 R_\Pi \lambda / [1 - \exp(-\pi/Q_H)] \right]. \quad (13)$$

7. Определим значение ускоряемого тока, при котором  $P = P_{\max}$ , приравнявая к нулю производную мощности по току:  $I = \frac{1}{2} (E_{T_0}/R_{II}\lambda) [1 - \exp(-\alpha l)]/(\alpha l) \cdot [1 - \exp(-\pi/Q_H)]$ . Соответственно значение максимального электронного КПД равно

$$\eta_{\max} = \frac{1}{2} (l/\lambda) \left( [1 - \exp(-\alpha l)]/(\alpha l) \right)^2 [1 - \exp(-\pi/Q_H)]. \quad (14)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости максимального КПД для секции с параметрами:  $\theta = \pi/2$ , диафрагмы без скруглений,  $\lambda = 16.5$  см,  $a/\lambda = 0.20$ ,  $\alpha = 0.01492$  м<sup>-1</sup> (медь),  $Q_{H\lambda} = 3.1672$ ,  $t/\lambda = 0.0382$ . Отметим, что для выбранных параметров волновода для достижения максимального КПД секцию не следует выбирать больше  $l = 1$  м, т.к. при такой длине  $\eta = 0.45$ , тогда как максимальное значение  $\eta = 0.46$  достигается при длине 3 м. Кроме того заметим, что если потерь в стенках КДВ нет, то КПД с увеличением длины секции плавно стремится к  $\eta_{\max} = 0.50$ . Выигрыш, однако, не велик: при  $l = 1$  м  $\eta = 0.456$ , а при  $l \rightarrow \infty$   $\eta = 0.50$ .

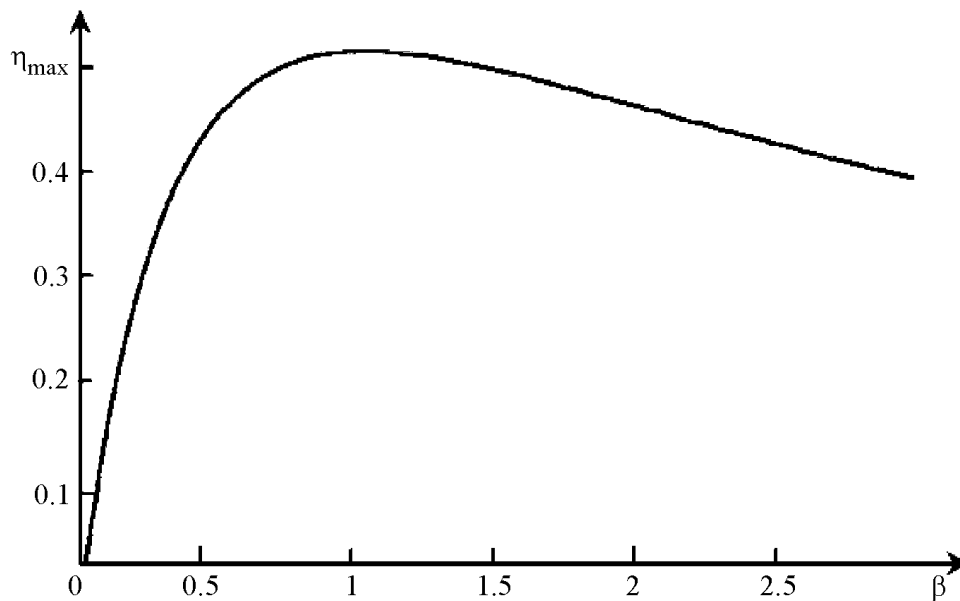


Рис. 3: Зависимость электронного КПД от коэффициента связи для бипериодической замедляющей системы.

8. Представляет интерес оценка электронного КПД для секций ускорителей, работающих на стоячей волне с бипериодическими структурами [5]. Используем данные из

работ [4, 5]:

$$P = IU = 1/(1 + \beta_0) \left( I \sqrt{8P_{\Gamma} \beta_0 R_y / (N_y (1 + \beta_0))} - I^2 R_y \right). \quad (15)$$

Здесь  $P_{\Gamma}$  – мощность СВЧ-генератора,  $R_y$  – шунтовое сопротивление ячейки,  $N_y$  – число ускоряющих ячеек в секции,  $\beta_0$  – коэффициент связи секции с подводящим волноводом. Ток, при котором максимальная мощность передается пучку, равен  $I = \sqrt{2P_{\Gamma} \beta_0 / (N_y R_y (1 + \beta_0))}$ . Соответственно максимальное значение КПД для бипериодической структуры равно

$$\eta_{\max} = 2\beta_0 / (1 + \beta_0)^2. \quad (16)$$

Если секция согласована с подводящим прямоугольным волноводом, то  $\beta_0 = 1$  и  $\eta_{\max} = 0.50$ . Если секция пересвязана до коэффициента связи  $\beta_0 = 1.5$ , то  $\eta_{\max} = 0.48$  (см. рис. 3).

Работа выполнена при поддержке грантов Рособразования в рамках ФЦП “Кадры инновационной России на 2009-2013 гг.”, мероприятие 1.2.2, ГК П433 и АВЦП “Потенциал высшей школы 2009-2010”, НИР 1.49.09.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] J. W. Wang, Dissertation (Stanford University, 1989); SLAC-Report-39 (1989).
- [2] Э. С. Масунов, *Электронная нагрузка током в ускорителях заряженных частиц* (М., МИФИ, 1999), с. 16.
- [3] S. Ramo, Currents Induced by Electron Motion. In: Proc. IRE **27**, 584 (1939).
- [4] О. А. Вальднер, Н. П. Собенин, Б. В. Зверев, И. С. Щедрин, *Диафрагмированные волноводы*. Справочник – 3-е издание, переработанное и доп. (М., ЭАИ, 1991).
- [5] В. В. Степнов, Диссертация, к.т.н. (М., МИФИ, 1986).
- [6] А. Н. Лебедев, А. В. Шальнов, *Основы физики и техники ускорителей*. Учебное пособие для вузов. – 2-ое издание (М., Энергоатомиздат, 1991).
- [7] О. А. Вальднер, А. Н. Диденко, А. В. Шальнов, *Ускоряющие волноводы* (М., Атомиздат, 1973).
- [8] И. С. Щедрин, *Поле излучения релятивистского сгустка электронов в КДВ*. В: Аннотации докладов НС-МИФИ-2009, т. 1, (М., МИФИ, 2009), с. 205.
- [9] М. С. Нейман, *Обобщение теории цепей на волновые системы* (М., Госэнергоиздат, 1955).

- [10] А. П. Кулаго, И. С. Щедрин, *Энергия, мощность пучка электронов и электронный КПД*. В: Аннотации докладов НС-МИФИ-2009, т. 1, (М., МИФИ, 2009), с. 206.
- [11] В. А. Буц, А. Н. Лебедев, *Когерентное излучение интенсивных электронных пучков* (М., ФИАН, 2006), с. 48.

*Печатается по материалам конференции "II Черенковские чтения: Новые методы в экспериментальной ядерной физике и физике элементарных частиц" (Москва, ФИАН, 14 апреля 2009 г.).*

Поступила в редакцию 4 ноября 2009 г.