

УДК 533.951

## ДИНАМИКА КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ РЕЗОНАНСНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, И. Б. Рудяк

*Исследованы линейная и нелинейная динамика уединенных волновых импульсов при неустойчивости электронного пучка в замедляющей электродинамической системе. Рассмотрен случай резонансной неустойчивости типа одночастичного вынужденного эффекта Черенкова. Показано, что при близких значениях скорости пучка и групповой скорости электромагнитной волны ширина импульса не меняется, но происходит нелинейное искажение его формы. При групповой скорости волны меньшей скорости пучка искажение формы импульса значительнее и происходит его уширение.*

Рассмотрим некоторую протяженную электродинамическую систему, вдоль которой (в направлении оси  $Z$ ) распространяется холодный прямолинейный электронный пучок. Если у системы имеются собственные электромагнитные волны с фазовыми скоростями  $V_{ph} = \omega/k_z$ , близкими к невозмущенной скорости пучка  $U$ , то в ней возможно развитие резонансных пучковых неустойчивостей, обусловленных вынужденным черенковским излучением собственных волн системы электронами пучка. Исследуем в такой замедляющей электродинамической системе с пучком эволюцию квазигармонического волнового возмущения вида:

$$F(z, t) = \frac{1}{2}[\varphi(z, t) \exp(-i\omega t + ik_z z) + \varphi^*(z, t) \exp(i\omega t - ik_z z)]; \quad (1)$$

Здесь  $F(z, t)$  – некоторая физическая величина, характеризующая возмущение;  $\omega$  и  $k_z$  – действительные частота и волновое число собственной электромагнитной волны системы;  $\varphi(z, t)$  – медленная огибающая возмущения. Медленность огибающей  $\varphi(z, t)$  означает, что она мало изменяется за время  $T = 2\pi/\omega$  и на расстоянии  $\lambda = 2\pi/k_z$ .

Уравнения для огибающей  $\varphi(z, t)$  получаются из уравнений, описывающих электродинамическую систему, и из уравнения Власова для функции распределения электронов пучка. При выводе уравнений для  $\varphi(z, t)$  используются метод медленных амплитуд (метод усреднения по длине волны  $\lambda = 2\pi/k_z$ ) [1] и представление функции распределения пучка в виде фазовой плотности его электронов [2]. Сама же процедура вывода в сильной степени зависит от физической природы и геометрии электродинамической системы. Для случая цилиндрического волновода с тонкими в поперечном сечении плазмой и электронным пучком подробный вывод имеется в [1, 3]. Уравнения оказываются следующими:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tilde{\varphi}(\xi, \tau) = -i \frac{1}{2} \theta \alpha_b \langle \rho(\xi, \tau) \rangle,$$

$$\langle \rho(\xi, \tau) \rangle = \frac{2}{N} \sum_{j(\xi)} \exp(i\tau - iy_j), \quad (2)$$

$$\frac{dy_j}{d\tau} = u_b \eta_j,$$

$$\frac{d\eta_j}{d\tau} = -\frac{i}{2} [(\alpha_b \langle \rho \rangle + \tilde{\varphi}(\xi, \tau)) \exp(-i\tau + iy_j) - K.C.].$$

Здесь  $\alpha_b$  – безразмерный параметр, пропорциональный отношению  $\omega_b^2/\omega_p^2$ , где  $\omega_{b,p}$  – ленгмюровские частоты электронов пучка и плазмы соответственно;  $\theta \leq 1$  – коэффициент связи между возмущениями плотностей плазмы и пучка;  $v_g = V_g/V_{ph}$  – отношение групповой скорости плазменной волны  $V_g$  к ее фазовой скорости  $V_{ph} = \omega/k_z$ ;  $u_b = U/V_{ph}$  – отношение скорости пучка к фазовой скорости волны. Величина  $u_b$  определяет расстройку черенковского резонанса – при точном резонансе  $u_b = 1$ .

В уравнениях (2) фигурируют также безразмерное время  $\tau = \omega t$ , безразмерная координата  $\xi = k_z z$ , безразмерные координата  $y_j = k_z z_j$  и скорость  $\eta_j = V_j/U$  электрона пучка с номером  $j$ . При моделировании пучка крупными частицами  $j$  есть просто номер частицы. Кроме того,  $\tilde{\varphi}(\xi, \tau)$  – безразмерная медленная огибающая, пропорциональная функции  $\varphi(z, t)$  из формулы (1), а  $\langle \rho(\xi, \tau) \rangle$  – безразмерная медленная огибающая возмущения плотности заряда пучка. Она вычисляется по второй формуле (2), в которой суммирование производится по всем крупным частицам в пределах длины волны

$\lambda = 2\pi/k_z$ , т.е. по частицам с  $y_j \in (\xi - \pi, \xi + \pi)$ , а  $N$  – число частиц на длине волны в невозмущенном пучке.

Уравнения (2) дополняются начальными условиями для огибающей и частиц электронного пучка, которые запишем в виде:

$$\tilde{\varphi}(\xi, 0) = \varphi_0(\xi),$$

$$y_j|_{\tau=0} = y_{0j} = h_j, \quad \eta_j|_{\tau=0} = 1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

где  $h = \lambda/N$  – "расстояние" между частицами в невозмущенном пучке. Последние два условия в (3) означают, что в начальный момент пучок невозмущен, и все электроны имеют скорость  $U$ .

Сформулированная начальная задача (2), (3) является довольно общей. Она описывает эволюцию квазигармонических возмущений в произвольной электродинамической системе с пучком, а не только в упомянутом выше плазменно-пучковом волноводе. Поэтому мы и не останавливаемся подробно на выражениях для параметров  $v_g$ ,  $\alpha_b$  и  $\theta$ . В зависимости от природы электродинамической системы и механизма ее взаимодействия с пучком они достаточно произвольны. Необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \theta \leq 1, \quad \alpha_b \ll 1. \quad (4)$$

Последнее из неравенств (4) означает малость плотности электронного пучка и связано с условиями применимости метода медленных амплитуд. Уравнения (2) легко обобщаются и на случай релятивистских электронных пучков, которые в настоящей работе не рассматриваются.

Начнем с решения начальной задачи (2), (3) в линейном приближении. Как следует из уравнений (2) и начальных условий (3) для  $y_j$  и  $\eta_j$ , для координат частиц справедливо представление  $y_j = y_{0j} + u_b \tau + \tilde{y}_j$ , где  $\tilde{y}_j$  – величина, обусловленная взаимодействием электрона с волной электродинамической системы. В линейном по возмущениям  $\tilde{y}_j$  и  $\tilde{\varphi}(\xi, \tau)$  приближении система (2) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{\varphi} &= -i \frac{1}{2} \theta \alpha_b \tilde{\rho}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + u_b \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \tilde{\rho} - 2i \tilde{\Delta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + u_b \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{\rho} + (\alpha_b - \tilde{\Delta}^2) \tilde{\rho} &= -\tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\tilde{\rho}(\xi, \tau) = -i \frac{2}{N} \exp(i\tilde{\Delta}\tau) \sum_{j(\xi)} \tilde{y}_j \exp(-iy_{0j}) \quad (6)$$

– огибающая возмущения плотности заряда пучка в линейном приближении, а  $\tilde{\Delta} = (1 - u_b)$  – расстройка черенковского резонанса. При резонансе  $\tilde{\Delta} = 0$ . Учитывая далее выражение (6) и начальные условия для  $y_j$  и  $\eta_j$ , сведем (3) к следующим соотношениям:

$$\tilde{\varphi}(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \tilde{\rho}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\rho}(\xi, 0) = 0, \quad (7)$$

являющимся начальными условиями для линейных уравнений (5). Поясним, что при получении (5) – (7) были использованы тождества:

$$\sum_{j(\xi)} \exp(-iy_{0j}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tau} (A(\tau, \xi = y_{0j} + u_b\tau)) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + u_b \frac{\partial}{\partial \xi} \right) A(\tau, \xi), \quad (8)$$

где величины  $y_{0j}$  определены в (3), а  $A(\tau, \xi)$  – произвольная функция.

Полагая теперь

$$\tilde{\Delta}^2 = \alpha_b, \quad (9)$$

что означает не простой черенковский резонанс, а резонанс собственной волны системы с одной из волн плотности заряда пучка, перепишем второе уравнение системы (5) в виде:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + u_b \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \tilde{\rho} - 2i(\pm\sqrt{\alpha_b}) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + u_b \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{\rho} = -\tilde{\varphi}. \quad (10)$$

В зависимости от соотношения между первым и вторым слагаемым в левой части уравнения (10) различают два механизма вынужденного черенковского излучения пучком собственных волн электродинамической системы – одночастичный и коллективный [3]. Легко показать, что при выполнении неравенства

$$\alpha_b \ll \theta^2 \quad (11)$$

доминирует первое слагаемое в левой части (10); механизм излучения при этом является одночастичным. В настоящей работе рассматривается только этот механизм излучения. Поэтому, считая неравенство (11) выполненным, отбросим в левой части (10) второе слагаемое и, с учетом первого уравнения системы (5), запишем следующую систему линейного приближения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{\varphi} &= -i \frac{1}{2} \theta \alpha_b \tilde{\rho}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + u_b \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \tilde{\rho} &= -\tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для решения начальной задачи (12), (7) удобно использовать преобразование Фурье по пространственной переменной  $\xi$  и преобразование Лапласа по времени  $\tau$ . Применяя эти преобразования и осуществляя затем обратное преобразование Лапласа, получим следующее решение линейной начальной задачи:

$$\tilde{\varphi}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\chi) \sum_{m=1}^3 \left[ \frac{(\Omega_m - \chi u_b)^2 \exp(-i\Omega_m(\chi)\tau + i\chi\xi)}{(\Omega_m - \chi u_b)^2 + 2(\Omega_m - \chi u_b)(\Omega_m - \chi v_g)} \right] d\chi. \quad (13)$$

Здесь  $\varphi_0(\chi)$  – преобразование Фурье огибающей начального возмущения  $\varphi_0(\xi)$  (см. (7)), а  $\Omega_m(\chi)$ ,  $m = 1, 2, 3$  – корни дисперсионного уравнения рассматриваемой электродинамической системы с пучком

$$(\Omega - \chi v_g)(\Omega - \chi u_b)^2 - (1/2)\theta \alpha_b = 0. \quad (14)$$

Вычисление интеграла (13) произведем в квазигармоническом приближении [4]. При этом учтем, что уравнение (14) имеет комплексные относительно  $\Omega$  решения, что означает неустойчивость системы. Причем максимум мнимой части  $\Omega$  достигается при  $\chi = 0$ . Поэтому, если функция  $\varphi_0(\chi)$  имеет резкий максимум в точке  $\chi = 0$ , то при вычислении интеграла (13) подынтегральное выражение можно разложить в окрестности этой точки по степеням  $\chi$  с точностью до членов первого порядка. В результате (13) преобразуется к виду:

$$\tilde{\varphi}(\xi, \tau) = \frac{1}{3} \varphi_0(\xi - u_g \tau) \sum_{m=1}^3 \exp(-i\delta_m b \tau), \quad b = \left( \frac{1}{2} \theta \alpha_b \right)^{1/3}, \quad (15)$$

где  $\delta_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ ,  $\delta_3 = 1$  – кубические корни из единицы,  $u_g = (k_z/\omega)U_g$ , а

$$U_g = (2/3)U + (1/3)V_g \quad (16)$$

– групповая скорость сноса волнового импульса при неустойчивости, обусловленной одночастичным вынужденным черенковским излучением.

Таким образом, согласно формуле (15), в квазигармоническом приближении импульс (волновой пакет) переносится в пространстве со скоростью (16) без искажения формы

и нарастает во времени по закону  $\exp(\sqrt{3}b\tau/2)$ . В дальнейшем из-за нарушения квази-гармоничности рост импульса замедляется и происходит его уширение. Однако на еще более ранней стадии начинают сказываться нелинейные процессы в пучке, для учета которых требуется численное решение нелинейных уравнений (2).

При решении нелинейной задачи (2), (3) начальное возмущение зададим в виде уединенного импульса

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} a \sin^2\left(\frac{\xi}{2n_\lambda}\right), & \xi \in [0, 2\pi n_\lambda], \\ 0, & \xi \notin [0, 2\pi n_\lambda]. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь  $n_\lambda$  – число длин волн, укладывающихся на длине импульса в начальный момент времени. Положим  $n_\lambda = 15$ ,  $a_0 = 10^{-4}$ ,  $\theta = 1$ ,  $\alpha_b = 10^{-2}$ . При этом выполнены условия медленности огибающей возмущения, начальный его уровень меньше уровня нелинейного насыщения, а также выполнено условие (11) одночастичности механизма излучения.

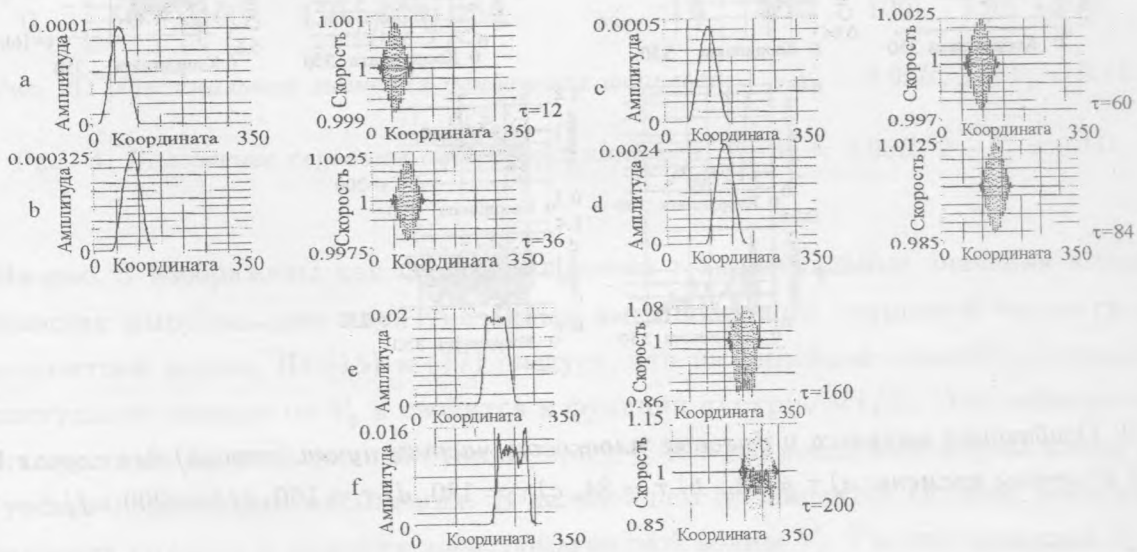


Рис. 1. Огибающая импульса и фазовые плоскости частиц пучка (справа) для случая  $V_g = 0.95U$  в моменты времени: а)  $\tau = 12$ , б)  $\tau = 36$ , в)  $\tau = 60$ , д)  $\tau = 84$ , е)  $\tau = 160$  и ф)  $\tau = 200$ .

На рис. 1 для различных моментов времени  $\tau$  представлены огибающие импульса

и фазовые плоскости электронов пучка для случая большой групповой скорости электромагнитной волны:  $V_g = 0.95U$ . При таком значении  $V_g$  скорость сноса при неустойчивости (16) близка к невозмущенной скорости пучка, а  $u_g \approx 1$ . Поэтому в линейном приближении любая точка импульса (15) перемещается по закону  $\xi = \tau + \xi_0$  (для средней точки возмущения (17)  $\xi_0 = n_\lambda \pi \approx 47$ ). Из рисунка видно, что импульс переносится в пространстве практически без искажения. Даже на поздней стадии ( $\tau = 160$  и  $\tau = 200$ ), когда происходит нелинейное насыщение роста амплитуды импульса и электроны пучка захватываются электромагнитной волной, ширина импульса не возрастает. Не изменяется и размер области локализации возмущений скорости в пучке, что следует из представленных на рисунке фазовых плоскостей.

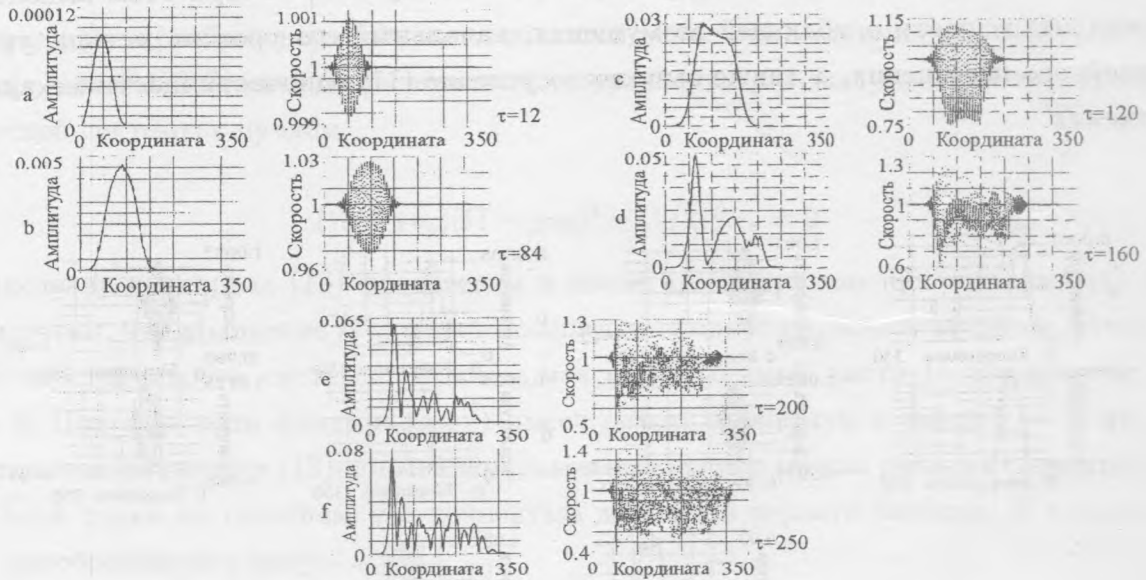


Рис. 2. Огибающая импульса и фазовые плоскости частиц пучка (справа) для случая  $V_g = 0.1U$  в моменты времени: а)  $\tau = 12$ , б)  $\tau = 84$ , в)  $\tau = 120$ , д)  $\tau = 160$ , е)  $\tau = 200$  и ф)  $\tau = 250$ .

На рис. 2 представлены огибающие импульса и фазовые плоскости электронов пучка для случая маленькой групповой скорости электромагнитной волны:  $V_g = 0.1U$ . При таком значении  $V_g$  скорость сноса при неустойчивости (16) порядка  $2/3$  от невозмущенной скорости пучка. Поэтому в линейном приближении любая точка импульса (15) перемещается по закону  $\xi = (2/3)\tau + \xi_0$ . В данном случае из-за большого относительного движения между электронами пучка и электромагнитными колебаниями наблюдается

заметное увеличение области локализации возмущений. Передний фронт перемещается со скоростью, близкой к невозмущенной скорости электронов пучка ( $\xi \approx \tau + \xi_0$ ), а задний – со значительно меньшей скоростью, близкой к скорости распространения электромагнитных колебаний ( $\xi \approx 0.1\tau + \xi_0$ ). На рис. 2 видно также существенное искажение формы импульса, в особенности на нелинейной стадии. Линейное же решение (15) если и проявляется, то только на малых временах ( $\tau \leq 80$ ).

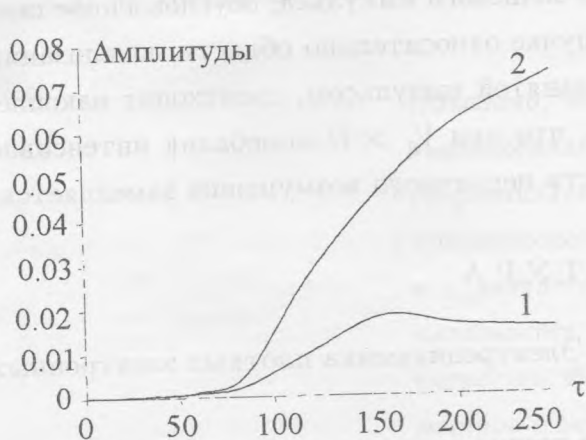


Рис. 3. Максимальные значения огибающих импульса: 1 –  $V_g = 0.95U$ ; 2 –  $V_g = 0.1U$ .

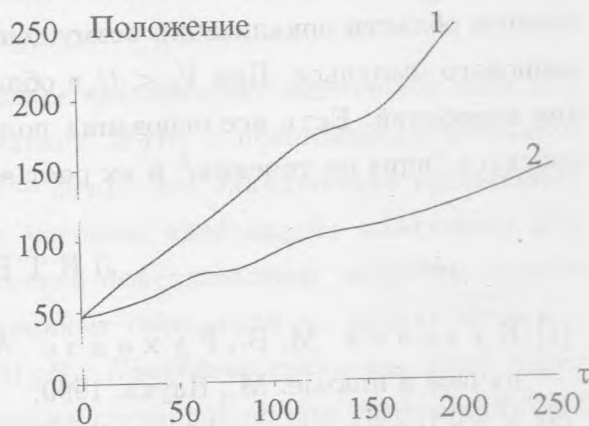


Рис. 4. Положение середины огибающих импульса: 1 –  $V_g = 0.95U$ ; 2 –  $V_g = 0.1U$ .

На рис. 3 изображены как функции времени  $\tau$  максимальные значения амплитуд огибающих импульса для двух указанных выше значений групповой скорости электромагнитной волны. Из (15) и (17) следует, что на линейной стадии максимальные амплитуды не зависят от  $V_g$  и сводятся к функции  $a_0 \exp(\sqrt{3}b\tau/2)$ . Это действительно имеет место, но на очень ранней стадии, при  $\tau \leq 70 - 80$ , когда амплитуды много меньше уровня нелинейного насыщения. В дальнейшем проявляется сильная зависимость от значения групповой скорости электромагнитной волны  $V_g$ . Так при меньшем  $V_g$  максимум амплитуды растет быстрее и до большего уровня, что, вероятно, обусловлено эффектом накопления колебаний на нелинейной стадии: в систему энергия вносится со скоростью пучка  $U$ , а переносится "вниз по течению" с меньшей скоростью, близкой к  $V_g$ . То, что на нелинейной стадии скорость переноса возмущения определяется именно величиной  $V_g$ , следует из рис. 2: задний фронт почти не перемещается, а амплитуда импульса около заднего фронта нарастает быстрее.



На рис. 4 в зависимости от времени показаны положения средних точек импульсов для случаев большой и малой групповых скоростей электромагнитной волны. В соответствии с линейной теорией эти точки перемещаются по закону  $\xi = u_g \tau + \xi_0$ . В случае  $V_g = 0.95U$  в результате численного моделирования получается примерно такой закон перемещения средней точки, особенно при  $\tau < 120$  (кривая 1 на рис. 4). Но при  $V_g = 0.1U$  средняя точка импульса перемещается значительно медленнее, чем по линейной теории (кривая 2 на рис. 4). В целом, чем больше разница между скоростями  $V_g$  и  $U$ , тем сильнее на нелинейной стадии искажение волнового импульса, обусловленное смещением области локализации возмущений в пучке относительно области локализации волнового импульса. При  $V_g < U$  в области, занятой импульсом, происходит накопление колебаний. Есть все основания полагать, что при  $V_g > U$  колебания интенсивно уносятся "вниз по течению" и их рост в области первичного возмущения замедляется.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., Наука, 1990.
- [2] Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., Наука, 1975.
- [3] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
- [4] Нелинейные волны. – Сб. статей: Пер. с англ. под ред. А. В. Гапонова и Л. А. Островского. М., Мир, 1977.

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 20 января 2003 г.