

УДК 533.9

УСТОЙЧИВОСТЬ МАЛОГО ПЛОСКОГО ПЫЛЕВОГО КЛАСТЕРА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Н. Г. Гусейн-заде¹, Д. Н. Клочков

В данной работе анализируются колебания и устойчивость плоских симметричных пылевых кластеров в виде правильного многоугольника и правильного многоугольника с частицей в центре при наличии внешнего однородного магнитного поля. Была рассмотрена устойчивость структур относительно малых возмущений. Для этого было линеаризовано уравнение движения относительно малых вариаций координат. В результате было получено дисперсионное уравнение (алгебраическое уравнение четвертой степени), которое исследуется численно для конкретных типов взаимодействия между частицами. Сравнение областей устойчивости для 4-угольника и 3-угольника с частицей в центре, а также для 5-угольника и 4-угольника с частицей в центре, показывает, что существуют области параметров, где устойчивы конфигурации без частицы в центре и неустойчивы конфигурации с частицей в центре, и наоборот.

Ключевые слова: пылевая плазма, симметричные плоские кластеры, устойчивость, малые колебания.

До настоящего времени много усилий как экспериментаторов, так и теоретиков направлены на изучение структур, образованных пылевыми частицам, и законов взаимодействия между ними (см. напр., обзоры [1] и [2]). В большинстве экспериментов квазикристаллические структуры наблюдаются во внешнем параболическом удерживающем потенциале. В некоторых экспериментах также наблюдают плоские пылевые

Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38, Россия.

¹ E-mail: namik@fpl.gpi.ru

кластеры во внешнем магнитном поле (см., напр., [3, 4]). В данной работе анализируются колебания и устойчивость симметричных пылевых кластеров в виде правильного многоугольника и правильного многоугольника с частицей в центре при наличии внешнего однородного магнитного поля.

Рассмотрим систему из N одинаковых частиц с массами m и зарядами q , взаимодействие между которыми описывается парным потенциалом $U(r)$. Сила взаимодействия между двумя частицами равна

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{U'(r)}{r}\mathbf{r} = f(r)\mathbf{r}. \quad (1)$$

Удержание вдоль оси Oz осуществляется внешним потенциалом (гравитационный плюс электрический). Как показали эксперименты [5, 6], в узкой области локализации кристалла он хорошо аппроксимируется параболической формой $U_z = \frac{1}{2}\alpha m\omega_{0z}^2 z^2$, где α – параболический коэффициент. Внешнее однородное магнитное поле \mathbf{B} считается направленным вдоль оси z .

Тогда уравнение движения n -ой частицы запишется как

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n = \frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}}_{\perp n} \times \mathbf{B} - \alpha m\omega_{0z}^2 \mathbf{r}_{zn} - \nu\dot{\mathbf{r}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N f(r_{nk})(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k), \quad (2)$$

где $n, k = 1 \dots N$, $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$, $\mathbf{r}_{\perp n} = (x_n, y_n, 0)$, m – масса макрочастицы, а ν – коэффициент трения частицы при ее движении относительно среды.

Для исследования колебаний и устойчивости удобно перейти к новым переменным

$$\mathbf{r}_n = (\rho_n; z_n), \quad (3)$$

где ρ_n – комплексная величина, равная $\rho_n = x_n + iy_n$, $1 \leq n \leq N$.

Уравнение для новых переменных принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\rho}_n + (i\Omega + \nu)\dot{\rho}_n = \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N f(r_{nk})(\rho_n - \rho_k), \\ \ddot{z}_n + \alpha\omega_0^2 z_n + \nu\dot{z}_n = \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N f(r_{nk})(z_n - z_k), \end{array} \right. \quad (4)$$

где $r_{nk} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|$, $\Omega = \frac{qB}{mc}$ – циклотронная частота.

Из экспериментов и результатов численного моделирования известно, что небольшое число макрочастиц образует правильные кластеры – треугольник, четырехугольник,

пятиугольник, шестиугольник с частицей в центре и так далее. Поэтому будем рассматривать случай, когда частицы располагаются в вершинах правильного N -угольника. В нулевом приближении координаты частиц равны

$$\rho_n = \rho_n^{(0)} = e^{(2\pi in/N)} R e^{-i\omega t}. \quad (5)$$

Условие баланса сил, определяющее равновесный размер кластера, имеет вид

$$\omega^2 + (-\Omega + i\nu)\omega + \frac{1}{m}s_1 = 0. \quad (6)$$

Как и следовало ожидать, это выражение не зависит от номера k , и все частицы действительно вращаются с одинаковой частотой. Здесь, для того чтобы упростить встречающиеся выражения для сумм, было введено следующее обозначение:

$$s_1(l) = 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(r_{Nk}) \sin^2 \left(\frac{\pi kl}{N} \right) \quad (7)$$

чисто вещественная величина; $r_{Nk} = 2R \sin \left(\pi \frac{k}{N} \right)$ — расстояние между двумя частицами. Решение уравнения (6) дает две частоты:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\Omega - i\nu \pm \sqrt{\Omega^2 - \nu^2 - 4 \frac{s_1(1)}{m} - 2i\Omega\nu} \right). \quad (8)$$

Так как в системе имеет место диссипация, то устойчивого положения нет. Тем не менее, если интервал времени наблюдения удовлетворяет условию $\nu\Delta t \ll 1$, мы можем считать радиус кластера R постоянным. Частота вращения кластера в общем случае при $\Omega^2 \gg \nu^2$ имеет два значения:

$$\omega' = \frac{1}{2} \left(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 4 \frac{s_1(1)}{m}} \right), \quad (9)$$

а условие стационарности

$$s_1(1) \leq \frac{m}{4} \Omega^2. \quad (10)$$

Знак равенства в условии (10) соответствует одной частоте вращения $\omega' = \frac{1}{2}\Omega$. Так как сумма $s_1(1)$ зависит от радиуса R кластера, то неравенство (10), по сути, является условием на размер многоугольника. Если взаимодействие является притяжением, то сумма $s_1(1)$ отрицательна, и мы получаем стационарность нулевого приближения при

любом радиусе R . Если взаимодействие отталкивающее, то сумма $s_1(1)$ положительна. В этом случае существует критическое значение радиуса R^* , превышение которого $R \geq R^*$ дает стационарную картину кластера. Отметим, что с увеличением дальности действия сил критический радиус R^* возрастает. Так, ряд потенциалов: Дебай, Кулон, взаимодействие с логарифмическим законом дают возрастающую последовательность критических радиусов R^* при заданном значении магнитного поля.

В дальнейшем мы будем считать, что условие (9) выполнено, и рассмотрим устойчивость многоугольника относительно малых возмущений

$$r_n + \delta r_n = (\rho_n + \delta \rho_n; \delta z_n), \quad (11)$$

где $\delta \rho_n = \delta x_n + i \delta y_n$.

Линеаризуем уравнение (4) по малым отклонениям от положения равновесия δz_n и $\delta \rho_n$. Линеаризованное уравнение, описывающее малые колебания в плоскости (X, Y) , ($\rho_n = \rho_n^{(0)} + \delta \rho_n$ и $|\delta \rho_n| \ll |\rho_n^{(0)}|$) имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\rho}_n + (i\Omega + \nu)\delta \dot{\rho}_n = & \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[f(r_{nk}^{(0)}) + \frac{1}{2} f'(r_{nk}^{(0)}) r_{nk}^{(0)} \right] (\delta \rho_n - \delta \rho_k) + \\ & + \frac{1}{2m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{f'(r_{nk}^{(0)})}{r_{nk}^{(0)}} (\rho_n - \rho_k)^2 \overline{(\delta \rho_n - \delta \rho_k)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Черта означает комплексное сопряжение. Полагая $\delta \rho_n = e^{(2\pi i n/N)} w_n e^{-i\omega t}$, перепишем уравнение (12) относительно w_n :

$$\begin{aligned} \ddot{w}_n + \left[i(\Omega - 2\omega) + \nu \right] \dot{w}_n - [\omega^2 + (-\Omega + i\nu)\omega] w_n - \\ - \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[f(r_{nk}^{(0)}) + \frac{1}{2} f'(r_{nk}^{(0)}) r_{nk}^{(0)} \right] (w_n - w_k e^{2\pi i(k-n)/N}) - \\ - \frac{R^2}{2m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{f'(r_{nk}^{(0)})}{r_{nk}^{(0)}} (1 - e^{2\pi i(k-n)/N})^2 \overline{(w_n - w_k e^{2\pi i(k-n)/N})} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение для w_n ищем в виде суммы двух сопряженных гармоник [7] (хорошо известная в теории молекулярных спектров подстановка):

$$w_n = u e^{2\pi i n l/N} + \bar{v} e^{-2\pi i n l/N}, \quad (14)$$

где u, v — произвольные функции времени, с учетом условия цикличности $\delta r_n = \delta r_{n+N}$ все колебания классифицируются целым числом l , лежащим в первой зоне Бриллюэна $1 \leq l \leq \frac{N}{2}$. Подстановка (14) в уравнение (13) приводит к

$$\begin{aligned} \ddot{u} + [i(\Omega - 2\omega) + \nu]\dot{u} + \frac{1}{m}[s_1(1) - s_2(l+1)]u + \frac{1}{m}s_3(l-1)v &= 0, \\ \ddot{v} + [-i(\Omega - 2\omega) + \nu]\dot{v} + \frac{1}{m}[s_1(1) - s_2(l-1)]v + \frac{1}{m}s_3(l-1)u &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} s_2(m) &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left[f(r_{Nk}) + \frac{1}{2} f'(r_{Nk}) r_{Nk} \right] \sin^2 \left(\pi \frac{k}{N} m \right), \\ s_3(m) &= \sum_{k=1}^{N-1} f'(r_{Nk}) r_{Nk} \sin \left(\pi \frac{k}{N} m \right) \sin \left(\pi \frac{k}{N} (m+2) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение системы уравнений (15) ищем в виде $u, v \sim e^{-i\sigma t}$. Условие нетривиальности решения дает дисперсионное уравнение:

$$\sigma^4 + a\sigma^3 + b\sigma^2 + e\sigma + d = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= 2i\nu, \\ b &= - \left\{ (\Omega - 2\omega)^2 + \nu^2 + \frac{1}{m} [2s_1(1) - s_2(l-1) - s_2(l+1)] \right\}, \\ e &= \frac{\Omega - 2\omega}{m} [s_2(l+1) - s_2(l-1)] - \frac{i\nu}{m} [2s_1(1) - s_2(l-1) - s_2(l+1)], \\ d &= \frac{1}{m^2} \{ [s_1(1) - s_2(l-1)][s_1(1) - s_2(l+1)] - s_3^2(l-1) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для колебаний по оси z ($\delta z_n = \text{Re}W(t) \exp(i\varphi_0 ns)$) получаем уравнение:

$$\ddot{W} + i\nu\dot{W} + (\alpha s_1(1) - s_1 l)W = 0. \quad (19)$$

Интересуясь вопросами устойчивости системы, мы в дальнейшем будем полагать $\nu = 0$.

Тогда критерий устойчивости колебаний по z ($W \sim \exp -i\sigma t$) примет вид:

$$\alpha \geq s_l/s_1. \quad (20)$$

Рассмотрим частные случаи.

Мода $l = 0$ соответствует сдвигам N -угольника как целого, при которых отсутствует его деформация. В этом случае $d = e = 0$ и дисперсионное уравнение (17) принимает вид: $\sigma^2(\sigma^2 + b) = 0$. Частоты устойчивых колебаний

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= 0, \\ \sigma_{3,4} &= \pm \sqrt{\Omega^2 - \frac{2}{m}[s_1(1) + s_2(1)]}\end{aligned}\quad (21)$$

имеют место при условии

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[2f(r_{Nk}) + \frac{1}{2}f'(r_{Nk})r_{Nk} \right] \sin^2 \left(\pi \frac{k}{N} \right) \leq \frac{m}{4}\Omega^2. \quad (22)$$

Если $2f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq f(r)$, то выполнение условия (10) влечет за собой выполнение условия (22). Этому удовлетворяют все отталкивающие потенциалы ($f(r) > 0$), спадающие с расстоянием по закону

$$f(r) \lesssim r^{-2} \quad \text{или} \quad U(r) \lesssim \ln(r) \quad (23)$$

или быстрее, т.е. все потенциалы, спадающие как логарифмический или быстрее. Кроме этого, подбором магнитного поля всегда можно добиться выполнения неравенства (22). Частоты $\sigma_{1,2}$ отвечают поступательному движению, а частоты $\sigma_{3,4}$ соответствуют колебательным степеням свободы.

Мода $l = 1$ соответствует деформациям N -угольника, при которых сохраняется его форма. В этом случае дисперсионное уравнение (17) распадается на два квадратных уравнения:

$$\begin{aligned}\sigma^2 - (\Omega - 2\omega)\sigma - \frac{1}{m}[s_1(1) - s_2(2)] &= 0, \\ \sigma^2 + (\Omega - 2\omega)\sigma - \frac{s_1(1)}{m} &= 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Первое уравнение имеет решения:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[\Omega - 2\omega \pm \sqrt{\Omega^2 - \frac{4}{m}s_2(2)} \right]. \quad (25)$$

Данные частоты соответствуют вращательным степеням свободы N -угольника как целого. Условие устойчивости малых возмущений – все частоты вещественны – имеет вид:

$$2 \sum_{k=1}^{N-1} \left[f(r_{Nk}) + \frac{1}{2}f'(r_{Nk})r_{Nk} \right] \sin^2 \left(2\pi \frac{k}{N} \right) \leq \frac{m}{4}\Omega^2. \quad (26)$$

В условиях $f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq 0$ неравенство (26) будет заведомо выполнено при любом Ω . Последнему удовлетворяют все отталкивающие потенциалы ($f(r) > 0$), спадающие с расстоянием по закону (23) или быстрее. Кроме этого, как и в случае с неравенством (22), неравенство (26) может быть удовлетворено подбором магнитного поля. Второе уравнение (24) дает частоты:

$$\sigma = \frac{1}{2} [\pm\Omega - (\Omega - 2\omega)]. \quad (27)$$

Данные частоты соответствуют растяжениям и сжатиям N -угольника по радиусу, когда его форма не деформируется. Условие устойчивости определяется неравенством (10) и обсуждено выше.

Таким образом, все известные отталкивающие потенциалы: логарифмический потенциал взаимодействия нитей, кулоновский и дебаевский потенциалы, дают устойчивость нулевой и первой мод. Из сказанного вытекает, что при $N < 4$ система устойчива для всех отталкивающих потенциалов, удовлетворяющих условию (23).

Рассмотрим теперь устойчивость мод с $l \geq 2$. Вначале остановимся на случае предельно слабого магнитного поля, так называемом бриллюэновском пределе, когда $\Omega - 2\omega = 0$ и $\Omega^2 = 4s_1(1)/m$. В этом случае $e = 0$, и дисперсионное уравнение становится биквадратным. Решение принимает вид:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} [-b \pm \sqrt{b^2 - 4d}]. \quad (28)$$

Условие устойчивости – все частоты реальны – принимает вид:

$$0 < d < \frac{b^2}{4}, \quad b < 0. \quad (29)$$

Условие $d < b^2/4$ выполняется всегда, так как приводит к тождественному неравенству

$$-s_3^2(l-1) < \frac{1}{4}[s_2(l+1) - s_2(l-1)]^2. \quad (30)$$

Два других неравенства дают

$$2s_1(1) - s_2(l+1) - s_2(l-1) > 0, \quad (31)$$

$$s_3^2(l-1) < [s_1(1) - s_2(l+1)][s_1(1) - s_2(l-1)]. \quad (32)$$

Так как в левой части неравенства (32) стоит положительная величина, то необходимым условием выполнения неравенств (31), (32) является требование $s_1(1) - s_2(l \pm 1) > 0$.

Последнее условие будет заведомо выполнено, если $s_1(1) > 0$, $s_2(l \pm 1) \leq 0$ или $f(r) > 0$ $f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq 0$. Последнему удовлетворяют все отталкивающие потенциалы, спадающие с расстоянием по закону (23) или быстрее. Таким образом, остается рассмотреть только условие (32).

В качестве примера рассмотрим критерий (32) для потенциала Дебая $U(r) = \frac{A}{r}e^{-\alpha r}$. Вычисления показывают, что 4-угольник устойчив при любом значении параметра α . Мода $l = 2$ устойчива для пятиугольника при условии $\tau = 2R\alpha < 6.64$, в случае 6-угольника при условии $\tau < 4.17$, 7-угольника при условии $\tau < 2.82$, 8-угольника при условии $\tau < 1.91$, 9-угольника при условии $\tau < 1.16$. Начиная с $N = 10$, мода $l = 2$ всегда неустойчива. Моды с $l \geq 3$ всегда неустойчивы. Следовательно, все многоугольники с $N \geq 6$ неустойчивы в бриллюэновском пределе.

В общем случае решение дисперсионного уравнения (17) выражается через корни кубической резольвенты:

$$\xi^3 + 2b\xi^2 + (b^2 - 4d)\xi - e^2 = 0, \quad (33)$$

которая имеет вещественные корни ($k = 0, 1, 2$)

$$\xi_k = -\frac{2}{3} \left(b + 3\rho \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2}{3}\pi k \right) \right) \quad (34)$$

в условиях:

$$D = -4d(b^2 - 4d)^2 + e^2(b^3 - 36bd) + \frac{27}{4}e^4 \leq 0. \quad (35)$$

Здесь

$$\rho = \frac{1}{3} \operatorname{sign} \left(-b^3 + 36bd - \frac{27}{2}e^2 \right) \sqrt{b^2 + 12d}, \quad (36)$$

$$\varphi = \arccos \left[\frac{|b^3 - 36bd + \frac{27}{2}e^2|}{(b^2 + 12d)^{3/2}} \right].$$

Выполнение условия (35) ведет за собой $b^2 + 12d > 0$. Частоты σ уравнения (17) будут вещественны при дополнительном условии $\xi_k \geq 0$ или

$$b + \operatorname{sign} \left(-b^3 + 36bd - \frac{27}{2}e^2 \right) \sqrt{b^2 + 12d} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2}{3}\pi k \right) \leq 0. \quad (37)$$

Необходимым условием выполнения последнего неравенства будет $b < 0$ или

$$2s_1(1) + s_2(l - 1) + s_2(l + 1) < m\Omega^2. \quad (38)$$

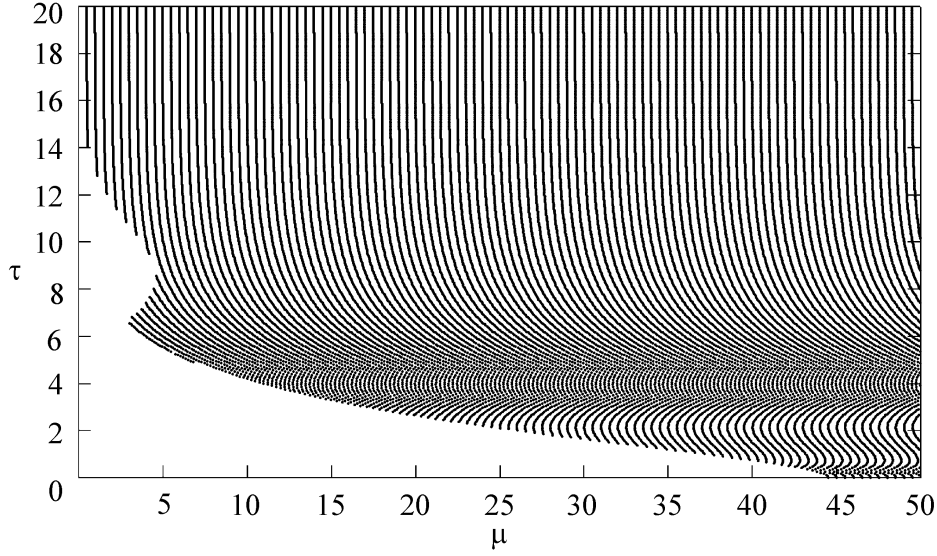


Рис. 1: Область устойчивости (выделена штриховкой) для моды $l = 2$ пятиугольника в случае дебаевского взаимодействия между частицами.

Условия устойчивости (35), (37) в общем случае зависят от величины магнитного поля. На рис. 1 в координатах τ - μ , где $\mu = 8mR^3\Omega^2/A$, представлена область устойчивости для моды $l = 2$ пятиугольника в случае дебаевского взаимодействия между частицами. Область устойчивости выделена штриховкой.

Рассмотрим предельный случай сильного магнитного поля $\Omega \rightarrow \infty$. Тогда $b \rightarrow -\Omega^2$ и $\varphi \rightarrow 0$. Неравенство (37) в этом пределе выполняется тождественно, т.к. для $k = 0$ дает $(e/b)^2 \geq 0$, а для $k = 1, 2$ в левой части (37) стоит отрицательное число $-1.5\Omega^2$. Дискриминант D является полиномом 4 степени относительно величины Ω^2 . Чтобы при $\Omega \rightarrow \infty$ выполнялось условие (35) необходимо, чтобы коэффициент при главной степени был отрицательным. Это дает условие устойчивости:

$$2|s_3(l-1)| < |2s_1(1) - s_2(l-1) - s_2(l+1)|. \quad (39)$$

Отметим, что условие (39) является менее сильным, чем условие (32). В этом проявляется стабилизирующее действие магнитного поля.

При $f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq 0$ и $f(r) > 0$ получаем $s_2(l \pm 1) \leq 0$ и $s_1(1) > 0$, поэтому $2s_1(1) - s_2(l-1) - s_2(l+1) > 0$, и неравенство (39) выполнено при $s_3(l-1) = 0$. Пусть

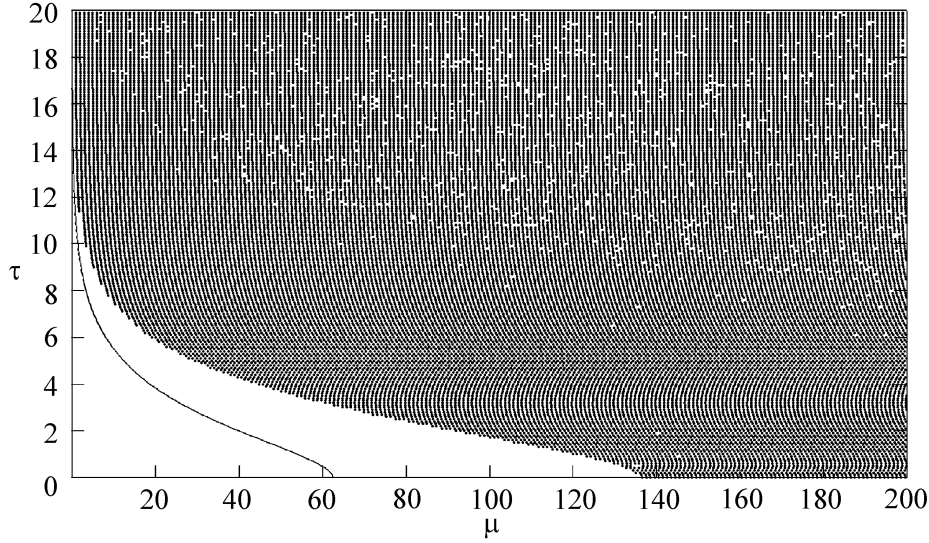


Рис. 2: Область устойчивости (выделена штриховкой) для моды $l = 2$ 4-угольника с частицей в центре для дебаевского взаимодействия между частицами. Линия определяет предельное значение критерия (48) (бриллюэновский предел).

$s_3(l - 1) > 0$, тогда неравенство (39) переходит в

$$\sum_{k=1}^{N-1} [f(r_{Nk}) + f'(r_{Nk})r_{Nk}] \cos^2\left(\pi \frac{k}{N}\right) \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}l\right) < \sum_{k=1}^{N-1} f(r_{Nk}) \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}\right) \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}l\right), \quad (40)$$

которое при $f(r) + f'(r)r \leq 0$ и $f(r) > 0$ выполняется для всех l и N . Пусть $s_3(l - 1) < 0$, тогда неравенство (39) переходит в

$$\sum_{k=1}^{N-1} f'(r_{Nk})r_{Nk} \cos^2\left(\pi \frac{k}{N}l\right) \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}\right) < - \sum_{k=1}^{N-1} f(r_{Nk}) \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}l\right) \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right), \quad (41)$$

которое требует проверки для различных l и N . Для $l = 0$ получаем $s_3(-1) > 0$ для всех потенциалов, удовлетворяющих условию $f'(r)r < 0$. Поэтому мода $l = 0$ устойчива для всех отталкивающих потенциалов с $f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq 0$. Для $l = 1$ получаем $s_3(0) = 0$, и неравенство (39) тождественно для всех отталкивающих потенциалов с $f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq 0$.

В случае $l = 2$, $N = 4$ условие устойчивости (39) переходит в

$$|f'(R\sqrt{2}) - \sqrt{2}f'(2R)| < |f'(R\sqrt{2}) + \sqrt{2}f'(2R)|. \quad (42)$$

В частности, неравенство выполняется для всех функций $f'(r)$, не меняющих знака. Этому условию удовлетворяют все потенциалы, являющиеся монотонными функциями

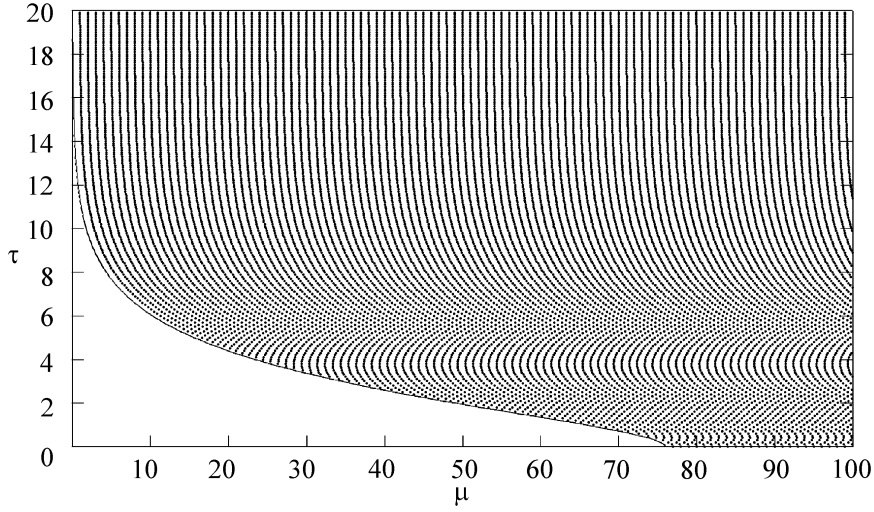


Рис. 3: Область устойчивости (выделена штриховкой) для моды $l = 2$ 5-угольника с частицей в центре для дебаевского взаимодействия между частицами. Линия определяет предельное значение критерия (48) (бриллюэновский предел).

без точек перегиба. Таким образом, 4-угольник устойчив в случае, когда величины $f'(R\sqrt{2})$ и $f'(2R)$ имеют одинаковые знаки.

Рассмотрим случай $l = 2$, $N = 5$. Чтобы выполнялось условие $s_3(l - 1) > 0$, необходимо выполнение функционального неравенства $f'(r) - 2 \cos(\pi/5)f'(2r \cos(\pi/5)) > 0$. Для степенных функций $f(r) = Cr^\alpha$ при условиях $f(r) + \frac{1}{2}f'(r)r \leq 0$ и $f(r) > 0$ последнее невозможно. Таким образом, мы получаем $s_3(l - 1) < 0$. Условие (41) принимает вид

$$\left[f(r_{N1}) + f'(r_{N1})r_{N1} \cos \frac{2\pi}{5} \right] \cos \frac{2\pi}{5} < 4 \left[f(r_{N2}) - f'(r_{N2})r_{N2} \cos \frac{\pi}{5} \right] \cos^3 \frac{\pi}{5}. \quad (43)$$

Последнее неравенство выполняется для всех убывающих функций: $f(r) > 0$, $f'(r) < 0$. Следовательно, 5-угольник устойчив для всех отталкивающих потенциалов, спадающих с расстоянием по закону (23) или быстрее.

Рассмотрим $l = 3$, $N = 6$. Неравенство $s_3(l - 1) < 0$ выполняется при условии $f'(r) - \sqrt{3}f'(\sqrt{3}r) < 0$, которое, например, имеет место для всех степенных функций $f(r) = Cr^\alpha$ ($C > 0$). Условие устойчивости (41) принимает вид:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}f'(R\sqrt{3}) < \frac{f(2R) - f(R)}{R}. \quad (44)$$

Для степенных функций $f(r) = Cr^\alpha$ ($C > 0$) условие (44) будет выполнено только если $-2.9673 < \alpha < 0$. Следовательно, все убывающие отталкивающие степенные потенциалы $U(r) = Ar^\mu$ с $\mu < -0.967$ дают неустойчивость 6-угольника.

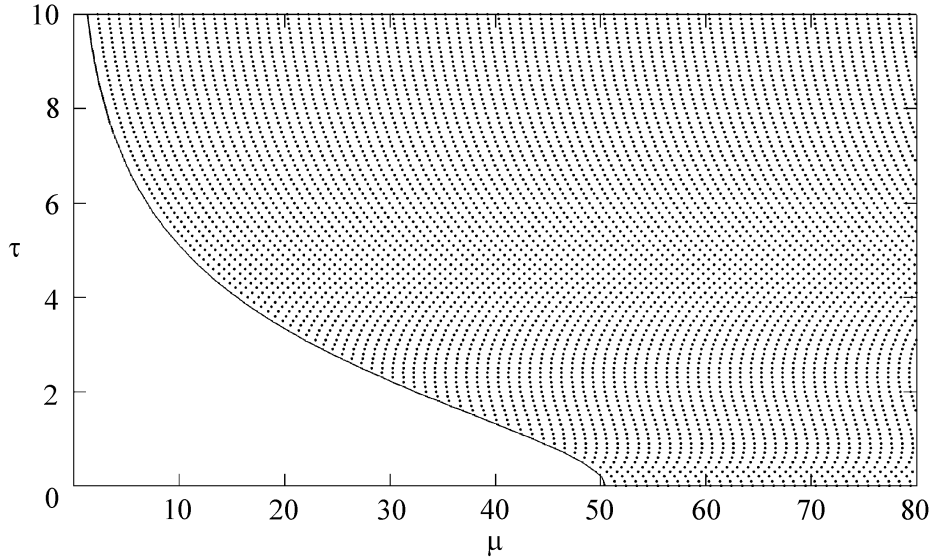


Рис. 4: Область устойчивости (выделена штриховкой) для моды $l = 1$ 3-угольника с частицей в центре для дебаевского взаимодействия между частицами. Линия определяет предельное значение критерия (48) (бриллюэновский предел).

Численные расчеты условия (39) для дебаевского взаимодействия показали, что четырех- и пятиугольники всегда устойчивы, а все моды с $l \geq 3$ неустойчивы. Следовательно, все многоугольники с $N \geq 6$ неустойчивы.

Полученные результаты могут быть напрямую применены также к отталкивающе-притягивающим потенциалам взаимодействия, например, таким как Дебай плюс Ле-саж, если в области $2R \sin(\pi/N) \leq r \leq 2R$ последние ведут себя как монотонно убывающие функции. В обратном случае необходимо проверять неравенства (35), (37).

Рассмотрим устойчивость N -угольника с частицей в центре. Уравнение движения

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_n + i\Omega\dot{\rho}_n &= \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N f(r_{nk})(\rho_n - \rho_k) + \frac{1}{m} f(r_{n0})(\rho_n - \rho_0), \\ \ddot{\rho}_0 + i\Omega\dot{\rho}_0 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N f(r_{k0})(\rho_0 - \rho_k). \end{aligned} \tag{45}$$

В нулевом приближении, когда ρ_n дается формулой (5), а $\rho_0 = \rho_0^{(0)} = 0$, получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - \Omega\omega + \frac{1}{m}[s_1(1) + f(R)] = 0. \tag{46}$$

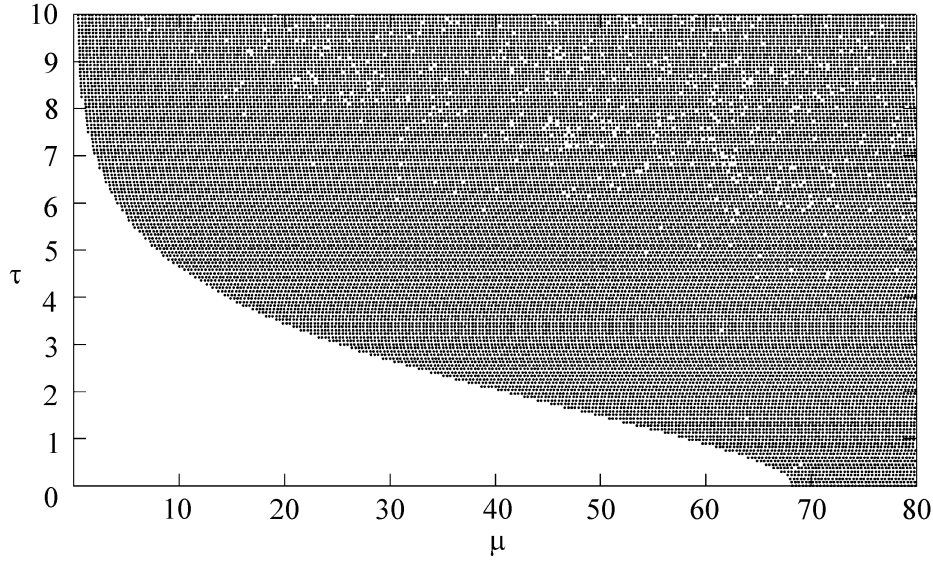


Рис. 5: Область устойчивости (выделена штриховкой) для моды $l = 2$ 4-угольника для дебаевского взаимодействия между частицами.

Решение

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - \frac{4}{m} [s_1(1) + f(R)]} \right) \quad (47)$$

является вещественным при условии устойчивости

$$s_1(1) + f(R) \leq \frac{m\Omega^2}{4}. \quad (48)$$

Если $f(R) > 0$, то условие (48) накладывает более сильное условие на величину магнитного поля, чем условие (10).

Полагая, что малые возмущения $\delta\rho_n = \rho_n - \rho_n^{(0)}$, $\delta\rho_0 = \rho_0$ оставляют неизменными координаты центра масс системы:

$$\delta\rho_0 = - \sum_{k=1}^N \delta\rho_k, \quad (49)$$

и повторяя вышеприведенные выкладки, получаем дисперсионное уравнение малых колебаний (17), в котором коэффициенты уже равны:

$$a = 0, \\ b = -\Omega^2 + \\ + \frac{1}{m} \left[2s_1(1) + s_2(l-1) + s_2(l+1) + 2f(R) + [f(R) + \frac{1}{2}f'(R)R][s_4(l-1) + s_4(l+1)] \right],$$

$$\begin{aligned}
e &= \frac{\Omega - 2\omega}{m} \left[s_2(l+1) - s_2(l-1) + [f(R) + \frac{1}{2}f'(R)R][s_4(l+1) - s_4(l-1)] \right], \\
d &= \frac{1}{m^2} \left\{ [s_1(1) - s_2(l-1) + f(R) + [f(R) + \frac{1}{2}f'(R)R]s_4(l-1)] \times \right. \\
&\quad \times [s_1(1) - s_2(l+1) + f(R) + [f(R) + \frac{1}{2}f'(R)R]s_4(l+1)] - \\
&\quad \left. - [s_3(l-1) - \frac{1}{2}f'(R)Rs_4(l-1)][s_3(l-1) - \frac{1}{2}f'(R)Rs_4(l+1)] \right\}. \quad (50)
\end{aligned}$$

Здесь

$$s_4(m) = 1 + \sum_{k=1}^N \eta^{km} = \begin{cases} 1, & 0 < |m| < N \\ N+1, & m = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Для кулоновского взаимодействия (предельный случай $\alpha = 0$) область устойчивости для конфигураций с частицей в центре меньше, чем для многоугольника без частицы. Рассмотрим дебаевское взаимодействие. Конфигурация $N+1$ устойчива в диапазоне $3 \leq N \leq 7$. Сравнение областей устойчивости для 4-угольника и 3-угольника с частицей в центре (рис. 4, 5), а также для 5-угольника и 4-угольника с частицей в центре (рис. 1, 2) показывает, что существуют области параметров, где устойчивы конфигурации без частицы в центре и неустойчивы конфигурации с частицей в центре, и наоборот. Это можно использовать для оценок потенциала взаимодействия между пылевыми частицами в реальных экспериментах.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ №№ 08-02-01172-а, 08-02-00791-а.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] V.N. Tsytovitch, G. Morfill and H. Thomas, Part I, Физика Плазмы **28**(8), 623 (2002).
- [2] В.Е. Форгов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров, УФН **174**(5), 495 (2004).
- [3] N. Sato, G. Uchida, T. Kaneko, S. Shimizu, and S. Iizuka, Phys. Plasmas **8**, 1786 (2001).
- [4] Felix Cheung, Alex Samarian and Brian James, New Journal of Physics **5**, 75.1-75.15 (2003).
- [5] E.B. Tomme, D.A. Law, B.M. Annaratone, and J.E. Allen, Phys. Rev. Lett. **85**, 2518 (2000).

- [6] H. Totsuji, T. Kishimoto, and C. Totsuji, Phys. Rev. Lett. **78**, 3113 (1997).
- [7] Sh.G. Amiranashvili, N.G. Gousein-zade, V.N. Tsyтович, Phys. Rev. E **64**, 016407 (2001).

Поступила в редакцию 27 октября 2009 г.