УДК 533.9.01

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИОНОВ ПЛАЗМЫ С ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ В СЛУЧАЕ ДВУХ СОРТОВ ИОНОВ

Р. Р. Рамазашвили, В. П. Силин, П. В. Силин, С. А. Урюпин

Получены явные выражения для кинетических уравнений ионов, определяющиеся ионно-звуковой турбулентностью плазмы, когда наличие двух сортов ионов приводит к повышению вынужденного рассеяния ионно-звуковых волн на ионах.

Ключевые слова: ионные кинетические уравнения, турбулентная плазма.

В настоящем сообщении приведены результаты получения кинетических уравнений для ионов в модели ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ) Силина–Урюпина [1, 2], когда для плазмы с двумя сортами ионов, благодаря различию отношения зарядов e_α к их массе m_α

$$\frac{e_1}{m_1} \neq \frac{e_2}{m_2},$$

вероятность вынужденного рассеяния ионно-звуковых волн на ионах может существенно возрастать по сравнению со случаем $e_1/m_1 = e_2/m_2$, отвечающим модели Быченкова–Силина–Урюпина [3, 4]. Соответственно это относится и к модели Кадомцева–Петвиашвили [5, 6].

В основу дальнейшего рассмотрения положены результаты теории ИЗТ плазмы, содержащей два сорта ионов, сформулированной в работах [1, 2]. В работе [1] были записаны кинетические уравнения для ионов в виде ($\alpha = 1, 2$):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} = J_\alpha + J_{\Lambda\alpha}, \tag{1}$$

где добавлены также интегралы столкновений Ландау $J_{\Lambda\alpha}$ ионов с ионами (см., напр., [7]). При этом

$$J_\alpha = \frac{1}{2m_\alpha^2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}N(\mathbf{k})N(\mathbf{k}')W_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',0)\left(\mathbf{k}''\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\right)^2, \tag{2}$$

Учреждение Российской академии наук Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991, Москва, Ленинский пр-т, 53.

где f_α – функция распределения ионов сорта α, $N(\mathbf{k})$ – распределение по волновым векторам плотности числа ионно-звуковых волн со спектром $\omega = kv_s(1+k^2r_{De}^2)^{-1/2}$, $v_s = \omega_L r_{De}$ – скорость звука, r_{De} – дебаевский радиус электронов, $\omega_L^2 = \omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2$ и $\omega_{L\alpha} = (4\pi e_\alpha^2 N_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$ – ленгмюровская частота ионов сорта α, имеющих плотность N_α. В формуле (1) также использовано обозначение $W_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',0)$, для которого, согласно [1],

$$W_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',0) = 4(2\pi)^3|\Lambda_\alpha \mathbf{k},\mathbf{k}',0|^2\left(\omega\frac{\partial\epsilon(\omega,\mathbf{k})}{\partial\omega}\right)^{-2}\delta(\omega-\omega'), \tag{3}$$

где $\epsilon(\omega,\mathbf{k}) = 1 + \delta\epsilon_e(\omega,\mathbf{k}) + \delta\epsilon_1(\omega,\mathbf{k}) + \delta\epsilon_2(\omega,\mathbf{k})$, $\delta\epsilon_e$ и $\delta\epsilon_\alpha$ – парциальные вклады в продольную диэлектрическую проницаемость электронов и двух сортов ионов. Наконец, считая выполненным неравенство

$$r_{De} \gg r_{D\alpha}\max[1, |e_\alpha N_\alpha/eN_e|^{1/2}], \tag{4}$$

где $r_{D\alpha}$ – дебаевский радиус ионов сорта α, e и N_e – заряд и плотность электронов, можно, согласно [1], записать следующее выражение для амплитуды рассеяния

$$\Lambda_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e_\alpha}{\omega}\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\times$$

$$\times\frac{1}{\delta\epsilon_1(0,\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\delta\epsilon_2(0,\mathbf{k}-\mathbf{k}')}\sum_{\beta=1,2}\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha}-\frac{e_\beta}{m_\beta}\right)\delta\epsilon_\beta(0,\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{5}$$

В приближении максвелловских распределений ионов отсюда имеем:

$$\Lambda_1(\mathbf{k},\mathbf{k}'0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e_1}{\omega(k)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\frac{e_2^2N_2T_1}{e_1^2N_1T_2+e_2^2N_2T_1}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right), \tag{6}$$

$$\Lambda_2(\mathbf{k},\mathbf{k}'0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e_2}{\omega(k)}\left(\frac{e_2}{m_2}-\frac{e_1}{m_1}\right)\frac{e_1^2N_1T_2}{e_1^2N_1T_2+e_2^2N_2T_1}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right). \tag{7}$$

Для аксиально-симметричного распределения ионно-звуковых пульсаций

$$N(\mathbf{k}) = N(k)\Phi(\cos\theta), \tag{8}$$

где θ – угол между направлением волнового вектора и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Далее ограничимся случаем, когда степень неизотермичности плазмы достаточно велика:

$$\frac{ZT_e}{T} \gg \left(1-\frac{e_2m_1}{e_1m_2}\right)^{-2}, \tag{9}$$

где T – температура порядка температуры первого сорта ионов T_1 и второго сорта ионов T_2, e_1 и e_2 – заряды ионов двух сортов, Z – характерная степень их ионизации, T_e – температура электронов. При этом (см. [2])

$$N(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L^6 r_{De}^5}{\omega_{Le}} \frac{(r_{D1}^2 + r_{D2}^2)^2}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^{-2} y(kr_{De}), \tag{10}$$

где

$$y(x) = \frac{1}{(1+x^2)x^4} \left[\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{3(1+x^2)^{3/2}}\right]. \tag{11}$$

Распределение ионно-звуковых пульсаций по углам, согласно [1], при $K_N \ll \lambda(1+\delta)^2$ имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{4K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{x^4}{(1+\epsilon-x)^{1-\alpha}}, \tag{12}$$

а при $K_N \gg \lambda(1+\delta)^2$:

$$\Phi(x) = \frac{2K_N}{\pi\lambda} \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{t^5 dt}{\varphi(t)\sqrt{x^2-t^2}}, \tag{13}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{K_N}{\lambda}\right)^{1/2} \left\{1.03 + 0.17t^2 - 0.66t^4 - 1.85t^2\sqrt{1-t^2}\ln\left[\frac{\sqrt{1-t^2}+1}{t}\right]\right\}. \tag{14}$$

Здесь $\lambda = 0.5$, δ – отношение декрементов черенковского затухания волн на ионах и электронах,

$$K_N = 6\pi^2 \frac{eN_e E\omega_{Le}^2}{\omega_L^8 r_{De}} \frac{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4}{(r_{D1}^2 + r_{D2}^2)^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \equiv \frac{E}{E_N}. \tag{15}$$

Согласно соотношению (15), удобный для представления асимптотических формул для спектра ИЗТ параметр K_N определяет величину напряженности порождающего турбулентность электрического поля относительно характерной напряженности поля E_N. Введем, наконец, обозначение для моментов функции $\Phi(x)$,

$$M_n = \int\limits_0^1 dx x^n \Phi(x). \tag{16}$$

Согласно [1], в случае сильных полей, когда $K_N \gg \lambda(1+\delta)^2$, для моментов имеем

$$M_0 = 2.47\sqrt{\frac{K_N}{\lambda}},\ M_1 = 1.84\sqrt{\frac{K_N}{\lambda}},\ M_2 = 1.44\sqrt{\frac{K_N}{\lambda}},$$

$$M_3 = 1.17\sqrt{\frac{K_N}{\lambda}},\ M_4 = 0.99\sqrt{\frac{K_N}{\lambda}}. \tag{17}$$

Все эти обозначения позволяют записать в правых частях уравнений (1) J_α в виде

$$J_1 \cong \frac{\lambda}{4}\frac{e_1^2\omega_L^9 r_{De}^2}{m_1^2\omega_{Le}^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left[\frac{r_{D1}^2(r_{D1}^2+r_{D2}^2)}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}\right]^2\left[\tau\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_y^2}\right)+\xi\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_z^2}\right], \tag{18}$$

$$J_2 \cong \frac{\lambda}{4}\frac{e_2^2\omega_L^9 r_{De}^2}{m_2^2\omega_{Le}^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left[\frac{r_{D2}^2(r_{D1}^2+r_{D2}^2)}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}\right]^2\left[\tau\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_y^2}\right)+\xi\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_z^2}\right], \tag{19}$$

где

$$\tau = \frac{1}{2}[M_0^2+M_0M_4+4M_2^2+4M_3M_1-3M_0M_2-2M_1^2-3M_2M_4-2M_3^2], \tag{20}$$

$$\xi = M_0M_2-M_1^2-M_0M_4-M_2^2+2M_1M_3+3M_2M_4-3M_3^2. \tag{21}$$

Используя приведенные выше результаты для M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 (см. (17)), получаем

$$\tau = 0.50\left(\frac{K_N}{\lambda}\right),\ \xi = 0.13\left(\frac{K_N}{\lambda}\right). \tag{22}$$

Таким образом, для функций распределения f_1 и f_2 получаем систему двух связанных уравнений диффузии в пространствах скоростей ионов

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = D_{1\perp}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_y^2}\right)+D_{1\parallel}\frac{\partial^2 f_1}{\partial v_z^2}+J_{\Lambda 1}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = D_{2\perp}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_y^2}\right)+D_{2\parallel}\frac{\partial^2 f_2}{\partial v_z^2}+J_{\Lambda 2}. \tag{24}$$

При этом для турбулентных коэффициентов диффузии имеем следующие выражения:

$$D_{1\perp} = 0.50\frac{3\pi}{8}\frac{eEN_e v_s}{m_1N_1}\frac{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4},$$

$$D_{1\parallel} = 0.13\frac{3\pi}{8}\frac{eEN_e v_s}{m_1N_1}\frac{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4},$$

$$D_{2\perp} = 0.50\frac{3\pi}{8}\frac{eEN_e v_s}{m_2N_2}\frac{\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4},$$

$$D_{2\parallel} = 0.13\frac{3\pi}{8}\frac{eEN_e v_s}{m_2N_2}\frac{\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}. \tag{25}$$

Следует подчеркнуть, что эти коэффициенты диффузии, благодаря их зависимости от плотностей N_α и температур T_α, являются функционалами функций f_α.

Обратимся теперь к случаю слабых полей, когда имеет место угловое распределение (12). Малые по сравнению с единицей параметры α и ϵ зависят от моментов M_n (16):

$$\alpha = (M_0 - 9M_2 + 10M_4)/(1+\delta),\ \epsilon = (M_2 - M_4)/(1+\delta). \tag{26}$$

Тогда, представив формулу (12) в виде

$$\Phi(x) = \frac{4K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)}\Psi(x), \tag{27}$$

для выражений M_n имеем $M_n = 4K_N a_n/3\pi\lambda(1+\delta)$, где

$$\Psi(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{x^4}{(1+\epsilon-x)^{1-\alpha}} = \frac{x^2[4(1+\epsilon)-(3+\alpha)x]}{(1+\epsilon-x)^{2-\alpha}},\ a_n = \int\limits_0^1 dx\cdot x^n\Psi(x). \tag{28}$$

Соответственно этому имеем:

$$a_n = \epsilon^{\alpha-1}\left[1+\sum_{m=0}^{n+2}\epsilon^{1+m}(n-1)\frac{(n+3-m)_m}{(\alpha)_{m+1}}\right] - (1+\epsilon)^{n+2+\alpha}\frac{(n+2)!(n-1)}{(\alpha)_{n+3}}, \tag{29}$$

где $(z)_0 = 1$ и $(z)_n = z(z+1)...(z+n-1)$ – символ Похгаммера [8]. Очевидно, что согласно (20), (21), τ и ξ окажутся довольно громоздкими функциями параметра K_N, характеризующего величину напряженности электрического поля,

$$\tau = \left[\frac{4K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)}\right]^2\bar{\tau},\ \xi = \left[\frac{4K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)}\right]^2\bar{\xi}, \tag{30}$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2}(a_0^2 - 3a_0a_2 - 2a_1^2 + a_0a_4 + 4a_1a_3 + 4a_2^2 - 3a_2a_4 - 2a_3^2), \tag{31}$$

$$\bar{\xi} = a_0a_2 - a_1^2 - a_0a_4 - a_2^2 + 2a_1a_2 + 3a_2a_4 - 3a_3^2. \tag{32}$$

В пределе $K_N \ll \lambda(1+\delta)^2$, используя приближенные выражения для малых параметров α и ϵ,

$$\alpha \approx \frac{\ln 2}{\ln[3\pi\lambda(1+\delta)^2(\ln 2)/2K_N]},\ \epsilon \approx \frac{2K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)^2\ln 2}\ln\left[\frac{3\pi\lambda(1+\delta)^2\ln 2}{2K_N}\right] \tag{33}$$

из (31) и (32) приближенно находим:

$$\bar{\tau} \approx \frac{3\pi\lambda(1+\delta)^2}{4KN}, \tag{34}$$

$$\bar{\xi} \approx \frac{3}{5}\alpha \left[\frac{3\pi\lambda(1+\delta)^2}{4K_N}\right]. \tag{35}$$

В результате для сравнительно несильных полей получаем систему двух диффузионных уравнений в пространстве скоростей, по виду аналогичных уравнениям (23) и (24), но с иными турбулентными коэффициентами диффузии в пространстве скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:

$$D_{1\perp} = \frac{1}{2}\frac{eEN_e v_s}{m_1 N_1}\frac{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4},$$

$$D_{1\parallel} = \frac{3\alpha}{10}\frac{eEN_e v_s}{m_1 N_1}\frac{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4},$$

$$D_{2\perp} = \frac{1}{2}\frac{eEN_e v_s}{m_2 N_2}\frac{\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4},$$

$$D_{2\parallel} = \frac{3\alpha}{10}\frac{eEN_e v_s}{m_2 N_2}\frac{\omega_{L2}^2 r_{D2}^4}{\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4}. \tag{36}$$

Сопоставим выражения (36), полученные при $K_N \ll \lambda(1+\delta)^2$, и (25), полученные при $K_N \gg \lambda(1+\delta)^2$. Если $K_N \simeq \lambda(1+\delta)^2$, то выражения (36) для $D_{1\perp}$ и $D_{2\perp}$ отличаются от выражений, даваемых формулами (25), на множитель $8/3\pi \simeq 0.85$. Также при $K_N \simeq \lambda(1+\delta)^2$, выражения (36) для $D_{1\parallel}$ и $D_{2\parallel}$ отличаются от выражений, даваемых формулами (25), на множитель $0.8\alpha/0.13\pi \simeq 1.15$. Принимая во внимание численную близость выражений (25) и (36) на границе области их применимости, можно, не претендуя на высокую точность, предложить использовать асимптотические выражения (25) и (36) как аппроксимацию коэффициентов диффузии во всем обсуждаемом диапазоне изменения отношения $K_N/\lambda(1+\delta)^2$, то есть напряженности электрического поля.

Представленные в настоящем сообщении интегралы столкновений ионов, обусловленные ИЗТ, прежде всего демонстрируют влияние анизотропии турбулентности, что помимо открывающихся возможностей получения новых, конкретных следствий в теории явлений переноса демонстрирует ограниченность всего используемого нами до сих пор подхода к теории такой турбулентности. Последнее связано с тем, что требуемый экспериментом сильный нагрев ионов вступает в противоречие с предположением об их максвелловском распределении. Это, в частности, ставит вопрос о необходимости углубления разработки теории ИЗТ. Вместе с тем, в случае быстрой релаксации из-за обычных парных столкновений ионов, приводящей к максвеллизации распределения ионов и к выравниванию их температур, обусловленные ИЗТ коэффициенты диффузии в пространстве скоростей ионов (см.(25) и (36)), оказываются не зависящими от температуры ионов, что приводит к существенному упрощению теории турбулентного нагрева ионов.

Авторы выражают признательность за финансовую поддержку этой работы в рамках проекта N 09-02-00674 РФФИ и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН N 30.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **102**, 78 (1992).

[2] В. П. Силин, С. А. Урюпин, Физика плазмы **19**, 894 (1993).

[3] В. Ю. Быченков, В. П. Силин, ЖЭТФ **82**, 1886 (1982).

[4] В. Ю. Быченков, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3, 27 (1983).

[5] Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме* (Москва, Наука, 1976), с. 210.

[6] В. И. Петвиашвили, ДАН СССР **153**, 1295 (1963).

[7] В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов* (Москва, Наука, 1971).

[8] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды* (Москва, Наука, 1981), с. 794.

Поступила в редакцию 14 декабря 2009 г.