УДК 533

ДИФФУЗИЯ В ГАЗЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Е. Э. Винке[1], Н. Г. Гусейн-заде[2]

Система вихрей моделируется как газ осцилляторов с определенной температурой (скоростью вращения вокруг оси). В гидродинамическом приближении определены условия, при которых в таком газе имеет место анизотропия диффузии. Для этого случая найдены продольный и поперечный коэффициенты диффузии и показано, что они различны. Причиной анизотропии диффузии является сила Кориолиса, появляющаяся из-за вращения вихрей (осцилляторов).

Ключевые слова: диффузия, газ осцилляторов.

1. Введение, основные уравнения. Рассмотрим газ заряженных частиц, движущихся по окружности радиуса a со скоростью v_0 вокруг оси Z. Предположим, что v_0 гораздо меньше тепловой скорости $v_T = \sqrt{T/m}$ частиц, где m – масса частицы и T – температура газа. В дальнейшем предполагается, что частота вращения $\omega_0 = v_0/a$ гораздо больше, чем частота столкновения частиц $\omega_0 \gg \nu$. Здесь частота столкновений ν определяет время релаксации при обмене моментом за счет столкновений частиц газа с частицами другого газа с более высокой плотностью, в котором и рассматривается диффузия первого газа. Такая модель газа осцилляторов использовалась в [1–3].

Для описания процесса диффузии мы должны решить уравнения движения рассматриваемого газа, предполагая, что заряд осциллятора равен q и не должен быть равен заряду свободного электрона. Для этого запишем уравнения одножидкостной гидродинамики в цилиндрической системе координат [4, 5]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{q}{m}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nu v_r,$$

[1] Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, 121552, Москва, ул. Оршанская, 3.

[2] Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, 119991, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: NGUS@mail.ru.

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_\varphi - \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{2\rho}\frac{\partial P}{r\partial\varphi} - \frac{q}{m}\frac{\partial\Phi}{r\partial\phi} - \nu v_\varphi, \tag{1}$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{q}{m}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \nu v_z,$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\rho v_z}{\partial z} = 0,$$

где Φ – потенциал продольного поля, создаваемого движением заряженных частиц, m – масса частицы,

$$(\vec{v}\nabla)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2}$$

Здесь мы используем уравнение состояния

$$P = nT, \tag{3}$$

где n – концентрация частиц, а $\rho = nm$. Предположим, что $T = \text{const}$, что вполне согласуется с реальной ситуацией (изотермическое приближение). В состоянии равновесия (без поля, $\Phi = 0$) концентрация постоянна, т. е. $n_0 = \text{const}$. В этом случае мы имеем:

$$v_{r0} = v_{z0} = 0,\ \Phi_0 = 0,\ v_{\phi 0} = \omega_0 r. \tag{4}$$

Если $\omega_0 \gg \nu$, уравнения упрощаются для достаточно больших r.

Для простоты предположим, что все равновесные и возмущенные величины не зависят от φ. Тогда уравнения (1) линеаризуются для малых возмущений n, v_r, v_ϕ и v_z, и получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\omega_0 v_\varphi = -\frac{T}{mn_0}\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{q}{m}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \nu v_r,$$
$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + r\omega_0 v_r = -\nu v_\varphi,$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{T}{mn_0}\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{q}{m}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \nu v_r, \tag{5}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + n_0\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

2. Решение и его анализ. Ищем решение уравнений (5) в виде $f = f(r)e^{-i\omega t + ik_z z}$. Тогда, подставив его в (5),

$$i(\omega + i\nu)v_r + r\omega_0 v_\phi = \frac{v_T^2}{n_0}\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{q}{m}\frac{\partial\Phi}{\partial r},$$

$$2\omega_0 v_0 - i(\omega + i\nu)v_\phi = 0, \tag{6}$$

$$i(\omega + i\nu)v_z = ik_z \frac{v_T^2}{n_0}\frac{\partial n}{\partial r} + i\frac{q}{m}k_z\Phi,$$

$$-i\omega n + n_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + n_0 ik_z v_z = 0,$$

найдем связь между Φ и n

$$-i\omega n - \frac{i(\omega + i\nu)}{(\omega + i\nu)^2 - 4\omega_0^2}\left(\frac{v_T^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial n}{\partial r}\right) + \frac{ik_z^2 v_T^2}{\omega + i\nu}n = \tag{7}$$

$$= \frac{(\omega + i\nu)}{(\omega + i\nu)^2 - 4\omega_0^2}\frac{iqn_0}{m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{i\frac{q}{m}n_0 k_z^2 \Phi}{(\omega + i\nu)^2}.$$

Использовав уравнение Пуассона для Φ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \Phi}{\partial r} - k_z^2\Phi = -4\pi qn, \tag{8}$$

можно найти спектр продольных колебаний рассматриваемого газа для любых произвольных соотношений между ω_0, ν, ω. Однако нас интересует только диффузия, т. е.

$$\omega_0 \gg v \gg \omega,\ kv_T. \tag{9}$$

В этой области частот уравнение (7) сокращается до вида:

$$i\omega n - \frac{\nu v_T^2}{4\omega_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial n}{\partial r}\right) + \frac{k_z^2 v_T^2}{\nu}n = \frac{qn_0}{m}\left(\frac{\nu}{4\omega_0^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \Phi}{\partial r} + ik_z^2\Phi\right). \tag{10}$$

Если n_0 так мала, что дебаевский радиус гораздо больше, чем размер неоднородностей возмущений плотности, т.е.

$$kv_t \gg \sqrt{\frac{4\pi q^2 n_0}{m}}, \tag{11}$$

то правой частью уравнения (10), описывающей полевое взаимодействие частиц, можно пренебречь, и газ можно рассматривать как газ нейтральных вращающихся частиц (вихрей) [2, 3, 6–8]. В этом случае из уравнения (10) можно вычленить уравнение диффузии для n в пространственно-временных координатах как:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\nu v_T^2}{4\omega_0^2}\Delta_\perp n - \frac{v_T^2}{\nu}\Delta_\parallel n = 0, \tag{12}$$

где $\Delta_\perp = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} r \dfrac{\partial}{\partial r}$, $\Delta_\parallel = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.
Из уравнения (12) можно найти, соответственно, продольный и поперечный коэффициенты диффузии:

$$D_\parallel = \frac{v_T^2}{\nu}, \; D_\perp = \frac{\nu v_T^2}{4\omega_0^2} = \frac{\nu^2}{4\omega_0^2} D_\parallel. \qquad (13)$$

Из последнего соотношения, учитывая (9), видно, что $D_\parallel \gg D_\perp$.

Из рассмотрения, приведенного выше, следует, что в газе вращающихся нейтральных частиц, в случае, когда частота вращения гораздо больше частоты столкновений, имеет место анизотропия диффузии. Аналогичный результат известен для газа заряженных частиц, вращающихся вокруг линий внешнего магнитного поля.

Причиной анизотропии диффузии в газе вращающихся нейтральных частиц является сила Кориолиса [4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (М., Наука, Физматлит, 1973).

[2] Т. А. Фабер, *Гидроаэродинамика* (М., Постмаркет, 2004).

[3] Г. Н. Абрамович, *Прикладная газодинамика* (М., Наука, 2001).

[4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (“Теоретическая физика”, том VI) (М., Наука, 1988).

[5] Л. Прандтль, *Гидроаэромеханика* (М., Мир, 1951).

[6] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы* (М., Высш. школа, 1978).

[7] A. F. Alexandrov et al., Plasma Toroidal Vortexes, ICPIG-17, 1987, Suanry (UK), Part 2, P. 426 (Springer, Berlin, 1987).

[8] J. O. Dabiri and M. Gharib, J. Fluid Mech. **511**, 311 (2004).

[9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика* (“Теоретическая физика”, том I) (М., Наука, 1988).

Поступила в редакцию 28 июня 2010 г.