УДК 537.86+621.373

О ПРЕДЕЛАХ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

М. А. Горбунов*, А. Н. Лебедев

В работе приведены оценки пределов когерентности излучения электронных пучков, обусловленных неопределенностью фаз индивидуальных излучателей, систематическим изменением профиля плотности тока, а также увеличением плотности пучка.

Ключевые слова: когерентность, вектор Пойнтинга, лазер на свободных электронах, плазменная частота, электромагнитное излучение.

Электромагнитное излучение пучковых систем причинно обусловлено излучением индивидуальных частиц, однако результирующее поле и, как следствие, его спектральный состав и угловое распределение зависят от фазовых соотношений между излучателями. Рассмотрение индивидуальных излучателей становится необходимым, если модель описывает пучок электронов малой плотности, когда приходится отказаться от гидродинамического описания процессов [1]. Этот вопрос становится особенно актуальным в связи с обсуждаемыми сейчас проектами лазеров рентгеновского диапазона на свободных электронах, где в связи с естественными ограничениями интенсивности пучка среднее расстояние между частицами может оказаться сравнимым с длиной волны. В свою очередь, отсутствие возможных когерентных явлений, хотя бы на избранных модах электромагнитного поля, разрушает механизм индуцированного излучения в классических системах. Указанный критерий кажется довольно очевидным и рассматривается в работах [2, 3], хотя и на основе сильно идеализированных модельных представлений.

Особенно сильно влияние фазового распределения зарядов в пучке может сказаться в так называемом режиме SASE (индуцированное усиление спонтанной эмиссии), где спонтанное излучение с присущими ему случайными фазовыми соотношениями играет роль “затравочного” агента для последующего индуцированного процесса. На первый

Учреждение Российской академии наук Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991, Москва, Ленинский пр-т, 53.

* E-mail:ujh@mail.ru.

план здесь выступает оценка "кооперативного числа" частиц, участвующих случайно когерентно в инициировании расчётной (или близкой к ней) моды индуцированного излучения. Для определения эффективного числа частиц, излучающих когерентно, мы выбираем простейшую модель – линейную цепочку излучателей, например, черенковских или элементарных осциллирующих диполей, распределённых вдоль пучка квазиравномерно.

Вектор Пойнтинга поля излучения на моде с частотой ω можно представить в виде $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathrm{rad}}C(\omega)$, где

$$\mathbf{P}_{\mathrm{rad}} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} \times \mathbf{B}_{\mathrm{rad}}]$$

– вектор Пойнтинга, соответствующий излучению индивидуальной частицы, $\mathbf{E}_{\mathrm{rad}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{rad}}$ – действительные амплитуды полей излучения под заданным углом, а

$$C(\omega) = \sum_{n,m=1}^{N} \exp[i(\varphi_n - \varphi_m)] \tag{1}$$

можно назвать фактором когерентности. В зависимости от фазовых соотношений он варьируется в пределах $0 \le C(\omega) \le N^2$, где N – полное число частиц.

Если частицы распределены по фазам φ_n случайно равномерно, то в средневероятное значение суммы дают вклад только слагаемые $n = m$, т.е. $\mathbf{P} = N\mathbf{P}_{\mathrm{rad}}$. Больше того, если случайность фазы сохраняется в любой волне из возможного спектра излучения, то спектрально-угловое распределение излучения для системы частиц остаётся таким же, как и для одной частицы; просто соответствующая спектральная плотность увеличивается в N раз. Такое излучение является абсолютно некогерентным. Это типично, например, для коротковолновой части спектра синхротронного излучения, где движение по квазипериодической траектории в магнитном поле заведомо не может быть поддержано на одном обороте с оптической точностью, так что на каждом последовательном обороте излучение имеет случайную фазу.

Если все излучатели абсолютно сфазированы, т.е. разность фаз любой пары составляет целое число 2π, то реализуется максимальный фактор когерентности $C = N^2$, приводящий при $N \gg 1$ к очень большому увеличению спектральной плотности мощности. Правда, на других частотах она уменьшается и может даже спадать до нуля.

Представление об абсолютной сфазированности индивидуальных излучателей оправдано лишь для тех длин волн, которые заведомо превышают геометрические размеры системы частиц. Можно также говорить о пространственной когерентности в системе больших размеров, но состоящей из регулярно расположенных малых (по сравнению с длиной волны) сгустков. Для очень малых длин волн и то и другое является абстракцией, так как в реальности положение отдельных частиц и фаза их возможных колебаний никогда не могут быть заданы с абсолютной точностью и фактически являются случайными величинами, определяемыми лишь статистическими характеристиками.

Пусть, например, относительно некоторой волны с частотой ω соседние излучатели сдвинуты в среднем по фазе φ на величину μ со статистической некоррелированной неопределённостью, распределённой по нормальному закону с дисперсией δ. Другими словами, для вычисления среднеквадратичного значения двойной суммы в (1) надо её взвесить с распределением вида

$$\prod_{s=1}^{N} \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\varphi_s - s\mu)^2}{\delta^2}\right),$$

особо выделив только члены $n = m$, так как частица всегда скоррелирована сама с собой. В результате имеем фактор когерентности, приведённый на одну частицу:

$$C = 1 + A^2\left(\frac{1}{N}\frac{\sin^2 \mu N/2}{\sin^2 \mu/2} - 1\right), \tag{2}$$

где $A = \exp(-\delta^2/4)$. Значение A изменяется от 0 для некоррелированного положения частиц до 1, когда расстояния строго одинаковы. Если неопределённость фазы мала, то излучение частиц сильно интерферирует, и в спектре когерентного излучения имеются максимумы (минимумы) на тех частотах и под теми углами, при которых соседние излучатели находятся в фазе (противофазе). В максимумах фактор когерентности равен N, а в минимумах спадает практически до нуля (при $N \gg 1$). Если же неопределённость фазы велика, что справедливо всегда в предельном случае очень высоких частот, то максимумы и минимумы сглаживаются, $C \approx 1$ и излучение некогерентно.

Уменьшение степени когерентности происходит не только из-за случайных флуктуаций плотности, но и из-за систематического её изменения, так или иначе связанного с изменением среднего расстояния между частицами. Особенно наглядно это видно на примере одномерной цепочки осцилляторов, где для описания достаточно внести в дифракционную сумму поправки, отвечающие за систематическое изменение фазового расстояния между соседними излучателями. Это достаточно достоверно описывает случай искажения профиля плотности при небольшом числе частиц на длине волны.

Для численного примера положим количество частиц в пучке равным десяти, этого должно быть достаточно для оценки когерентных эффектов, т.к. когерентные пики, пересчитанные на одну частицу, в идеале должны быть порядка N. Пусть распределение частиц задано по квадратичному закону, причём в середине пучка частицы распределены плотнее друг к другу, чем на фронте и в хвостовой части. Тогда спектрально-угловое распределение в системе отсчёта, связанной с пучком, выглядит так, как представлено на рис. 1(а). Из рисунка видно, что искажение профиля плотности тока уменьшает абсолютное значение интенсивности излучения и вносит в угловое распределение хаотический характер, т. к. в нём сильнее сказывается не системная, а случайная корреляция фазы частиц. Угловое распределение излучения, порожденного частицами с большим отклонением от равномерного распределения, представленное на рис. 1(б), свидетельствует о полном разрушении механизма когерентности.

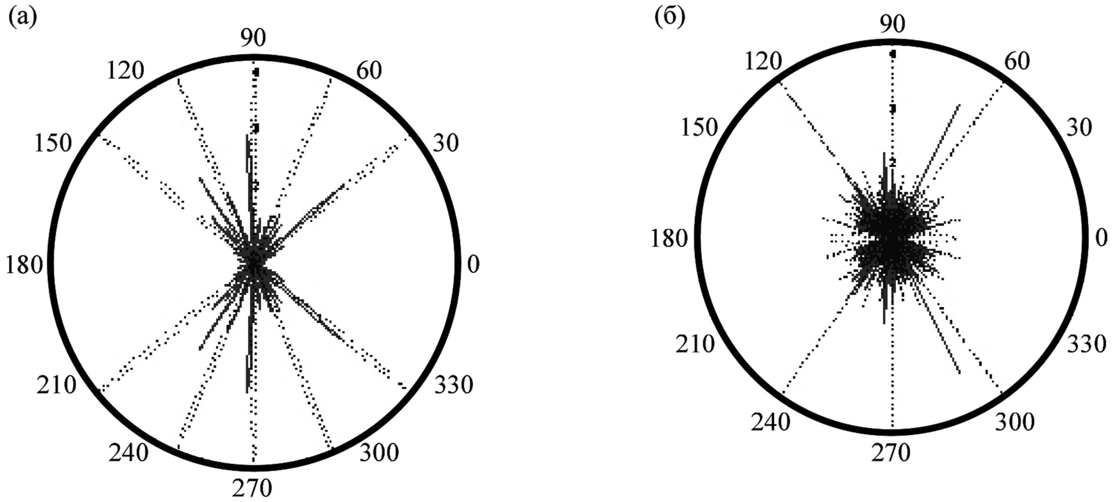

Рис. 1: *Спектрально-угловое распределение в плоскости колебаний излучения системы линейных осцилляторов с равномерным распределением (а) и квадратичным (б).*

Для анализа влияния профилирования тока частиц примем распределение последних в параболическом виде, т.е. расстояние между частицами пучка положим медленно нарастающим с номером частицы. Поскольку наибольшая плотность частиц приходится на середину пучка (вершина параболы) отсчёт номера частиц примем с его середины. Тогда дифракционную сумму из выражения (1) можно представить в виде

$$\sum = \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left(\mu m + \frac{1}{3} B^3 m^3 \right), \tag{3}$$

где B – некоторая постоянная, а сумма определена с точностью до несущественного в данном случае слагаемого порядка единицы, связанного с четностью полного числа частиц. Суммирование проводится по бесконечному числу частиц, учитывая, что члены с большими m не могут участвовать в когерентном сложении мощностей. Данная сумма периодична по μ с периодом 2π. Поэтому дальнейшие рассуждения сведём к рассмотрению интервала $0 \leq \mu \leq 2\pi$. Согласно формуле суммирования Пуассона [4], выражение (3) можно представить в виде

$$\sum = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left((\mu + 2\pi n x) + \frac{1}{3} B^3 x^3 \right) dx.$$

Внутренний интеграл сводится к функции Эйри [5], так что последнее выражение даёт

$$\sum = \frac{2\pi}{B} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Ai} \left(\frac{\mu + 2\pi n}{B} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Ai} \left(\frac{-\mu + 2\pi n}{B} \right) \right\}. \tag{4}$$

Выделяем члены, которые потенциально могут быть малыми на границах интервала для μ даже при малом B. Поскольку функция Эйри быстро убывает с ростом аргумента, то для первой суммы $n = 0$, для второй $n = 1$. Дифракционную сумму теперь можно представить в виде

$$\sum = \frac{2\pi}{B} \left[\mathrm{Ai} \left(\frac{\mu}{B} \right) + \mathrm{Ai} \left(\frac{\mu - 2\pi}{B} \right) \right]. \tag{5}$$

Результат приведён на рис. 2, из которого видно, что в пике когерентности значение суммы остаётся конечным даже при принятом бесконечном числе частиц. В частности, при малых B на границах рассматриваемого интервала $\sum \approx 0.72\pi/B$.

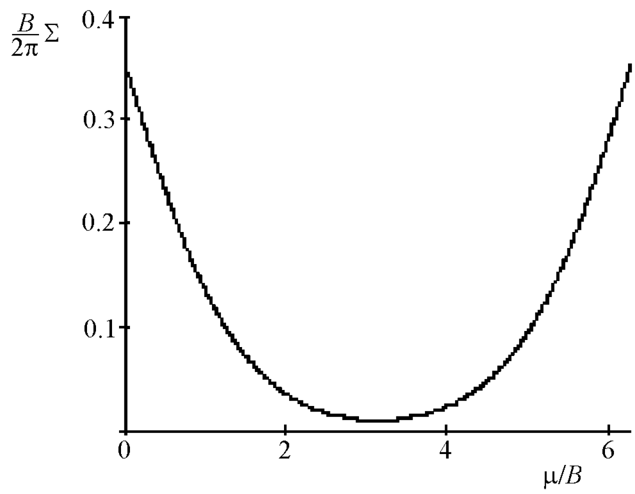

Рис. 2: *Фактор когерентости.*

За оценку эффективного числа частиц, излучающих когерентно, примем количество излучателей, формирующих характерные когерентные пики. Для когерентного излучения с равномерным распределением максимумы коэффициента когерентности (на одну частицу) равны числу частиц пучка. Если следовать этому определению, то количество частиц, эффективно излучающих когерентно, с поправкой, разумеется, на уровень спонтанного (некогерентного) излучения, равно примерно $2.3/B$.

Для оценки B заметим, что с номером частиц растёт расстояние между соседними излучателями. Если m частиц распределены на расстоянии $x = \mu m + B^3 m^3/3$, то плотность частиц определяется как $dm/dx \cong (\mu + B^3 m^2)^{-1}$. При $m = 0$ плотность максимальна и равна $1/\mu$. Учтём, что при малых B вклад в сумму быстро уменьшается с ростом номера частицы в силу асимптотического поведения функции Эйри. Тогда параметры распределения B и μ можно выразить через полную длину сгустка (на полувысоте) L и число частиц N, содержащихся на этой длине, т.е. через непосредственно измеримые параметры: $\mu = 6L/N; B = 2(3L)^{1/2}/N$. Отсюда получаем оценку числа когерентно излучающих частиц:

$$N_{\text{ef}} = 0.7N/L^{1/2}. \tag{6}$$

Напомним, что длина сгустка выражается в единицах длины волны и всегда существенно больше единицы, так что кооперативное число частиц гораздо меньше полного, хотя и может оставаться большим. Впрочем, оценки эффективного числа когерентно излучающих частиц также сильно зависят от конкретной схемы реализации излучающей системы, систематических и случайных фазовых смещений и профиля плотности тока.

В нашем случае оценка справедлива лишь при $N \gg 1$ и может быть распространена на случай, когда расстояния между частицами сравнимы с длиной волны.

Есть ситуации, когда для того, чтобы считать сгусток электронов излучающим когерентно, не нужно требовать соблюдения фазовых соотношений отдельных его излучателей или однородности плотности заряда. Такой случай достигается, когда в своей системе отсчёта все частицы сосредоточены внутри объёма λ^3, где λ – длина волны излучения. С точки зрения общей теории излучения такая система из N заряженных частиц излучает как одна частица увеличенного в N раз заряда. Этот в общем-то тривиальный случай является частным для более общего утверждения, что система частиц когерентна на тех длинах волн, которые больше её физического размера. Отметим, что это утверждение лежало в основе физической идеи коллективного ускорения [6].

Однако для очень плотных пучков в λ-объёме может оказаться так много частиц, что частота плазменных колебаний будет сравнима с частотой электромагнитного излучения. Ленгмюровская частота в собственной системе отсчёта: $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$, где n_e – концентрация электронов, e и m_e – заряд и масса электрона соответственно.

Следовательно, представление о формировании когерентного излучения как результата интерференции излучения невзаимодействующих частиц может оказаться не совсем правильным в плотных пучках, где внутренние степени свободы оказывают существенное влияние на динамику частиц. Определим критерий применимости модели несвязанных частиц соотношением $\omega_p < \omega_r$, где под ω_r подразумевается частота электромагнитного излучения системы частиц. Тогда, принимая во внимание, что число частиц в сгустке является релятивистским инвариантом, получаем в лабораторной системе условие $\sqrt{\frac{N\gamma r_0}{\lambda^3}} < \frac{\pi}{\lambda}$. Здесь в качестве объёма, содержащего N частиц, выбран цилиндр с сечением $\pi\lambda^2$ и продольным размером λ/γ, последнее учитывает сокращение продольных размеров системы при переходе из собственной системы отсчёта в лабораторную. Тогда критерий, ограничивающий число частиц, излучающих когерентно в традиционном смысле, описывается соотношением $N < \pi^2\lambda/\gamma r_0$, где r_0 – классический радиус электрона ($\sim 3.6 \cdot 10^{-13}$ см). Нарушение этого условия физически означает разрушение сгустка за время, меньшее периода волны.

Рассмотренные модельные задачи указывают на существование пределов когерентности как в пучках с малой плотностью, где основной вклад дают случайные процессы, влияющие на фазовые сдвиги элементарных излучателей, так и в плотных потоках частиц, где излучение во внутренние степени свободы может препятствовать зарождению и развитию индуцированных процессов – энергия расходуется на распад пучка.

Оценки, приведённые в данной работе, показывают долю частиц, способных дать вклад в индуцированный сигнал на той или иной моде. Другими словами, приведен один из простейших методов оценки способности пучка с заданным распределением профиля плотности тока излучать когерентно на определённой длине волны.

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. A. Buts, A. N. Lebedev, and V. I. Kurilko, *The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams* (Springer, 2006).

[2] N. F. Shul'ga and D. N. Tyutyunnik, JETP Letters **78**(11), 700 (2003) [Pis'ma v Zh. Eksp. i Teor. Fiz. **78**(11), 1212 (2003)].

[3] В. В. Огнивенко, *Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук* (ХФТИ, Харьков, 2007 г.)

[4] В. И. Курилко, Ю. В. Ткач, Физические пределы укорочения длины волны вынужденного когерентного излучения в ЛСЭ. Плазменная электроника: Сб. науч. тр. (Киев, Наукова думка, 1989).

[5] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* (Москва, Наука, 1983).

[6] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям* (Москва, Наука, 1979).

[7] В. И. Векслер, Атомная энергия **2**(5), 427 (1957).

Поступила в редакцию 28 февраля 2011 г.