

УДК 533.9+536.7

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ

С. А. Майоров

В работе на основе численного моделирования исследуются кинетические характеристики броуновского движения частицы в идеальном газе. Рассматриваются случаи одномерного и трехмерного движения, а также различные граничные условия для взаимодействия атомов с броуновской частицей. Получены функции распределения по скоростям для различных отношений масс частицы и атомов идеального газа. Моделирование проводилось методом молекулярной динамики.

Обнаруженное в 1827 г. английским ботаником Р. Броуном хаотическое движение пыльцы явилось предметом многочисленных исследований, и в статистической физике модель случайных блужданий применяется для разнообразных задач. Теория броуновского движения хорошо развита, однако исследования последних лет открытых систем открывают новые аспекты в этом хорошо изученном предмете. Одним из примеров открытой системы является пылевая плазма. Первоначально пылевая плазма исследовалась в основном в связи с астрофизическими приложениями [1]. Но последние 10 лет в связи с развитием микроэлектронных технологий (плазменная обработка полупроводниковых пластин) на первый план вышли исследования пылевой плазмы в лабораторных условиях. На первом этапе этих исследований пылинки микронных размеров в плазموхимических реакторах микроэлектроники рассматривались как досадный фактор, приводящий к уменьшению выхода годных кристаллов микросхем. Основной целью являлось совершенствование технологического процесса для уменьшения их числа. В последнее же время на первый план вышли задачи исследования собственно пылевой плазмы. При этом, в отличие от исследования свойств пылинок в плазме, основное внимание уделяется изучению коллективных явлений, обусловленных зарядом пылинок,

который составляет существенную часть от заряда плазменных частиц. Образование пылевых облаков, капель, кристаллов, слабо упорядоченных структур, эффекты левитации, образование пустот (войды), формирование кристаллических решеток из пылевых частиц в катодном слое – вот далеко не полный перечень объектов исследования. Дополнительный интерес вызывает также возможность технически достаточно простой визуализации и манипуляций с пылинками.

В настоящей работе исследовалась модельная задача о броуновском движении частицы в идеальном газе при различных условиях взаимодействия сталкивающихся с ней атомов [2]. Представляет интерес вопрос о средней кинетической энергии частицы в такой системе. Многие экспериментальные данные (см., напр., [3]), а также недавнее рассмотрение на основе кинетической теории [4, 5] говорят о значительной кинетической энергии частицы, превосходящей кинетическую энергию тяжелой компоненты – ионов.

На основе численного моделирования рассматривается несколько модельных задач, начиная с простейшей – плоской частицы (листа), находящейся в бесконечно глубокой и узкой потенциальной яме и подвергающейся толчкам со стороны атомов идеального газа. Рассчитывалась зависимость кинетической энергии пылинок от времени и строилась функция распределения (ФР) частицы по скоростям. Рассмотрены различные законы взаимодействия броуновской частицы с атомами газа: упругое столкновение, условие прилипания, а также и более сложные граничные условия – мягкая и демоническая частица. Под мягкой частицей понимается частица, которая при столкновении поглощает массу и импульс, а затем теряет массу без потери скорости. Такое условие может использоваться для моделирования реального неупругого взаимодействия при отсутствии адсорбции атомов на поверхности пылинок. Под демонической частицей (аналогично демону Максвелла) понимается частица, которая поглощает и теряет массу и импульс по некоторым логическим правилам. Этот случай не реализуется в термодинамике, но он соответствует некоторым теоретическим моделям. Рассматривались также и различные распределения атомов газа по скоростям – максвелловское и моноэнергетическое.

Рассмотрим случай равновесного газа атомов массы m , числовой плотностью N и температурой T . Здесь и далее температуру будем измерять в энергетических единицах. Для краткости броуновскую частицу с массой M (макрочастицу, пылинку) далее будем называть частицей.

Средние характеристики сталкивающихся со стенкой атомов. Максвелловская ФР

атомов по скоростям V вдоль выделенного направления x имеет вид

$$f_M(V) = (2m/\pi T)^{1/2} \exp(mV^2/2T). \quad (1)$$

Сталкивающиеся со стенкой атомы имеют следующую ФР по нормальной к поверхности компоненте скорости:

$$f_j(V) = (2mV/T) \exp(mV^2/2T). \quad (2)$$

Плотность потока атомов на стенку равна $J_M = (T/2\pi m)^{1/2} N$, отношение средней скорости падающих на стенку атомов $V_J = (9\pi T/8m)^{1/2}$ к средней скорости атомов в единице объема $V_0 = (8T/\pi m)^{1/2}$ равно $3\pi/8$, наиболее вероятная скорость атомов в единице объема $V_M = (2T/m)^{1/2}$ [2]. Часто также используется значение характерной тепловой скорости $V_T = (T/m)^{1/2}$, которая соответствует энергии $T/2$. Средняя кинетическая энергия движения в нормальном к поверхности направлении сталкивающихся со стенкой атомов равна T , в отличие от средней кинетической энергии атомов в объеме, равной $T/2$ (в расчете на одну степень свободы). Это обстоятельство обусловлено тем, что частота столкновений с поверхностью у атома пропорциональна его скорости (2). Соответственно, в трехмерном случае средняя кинетическая энергия атомов в объеме равна $3T/2$, а средняя кинетическая энергия сталкивающихся со стенкой атомов равна $2T$.

Рост массы частицы. При определенных условиях пылинка может поглощать все попадающие в нее атомы. Такая ситуация помимо пылевой плазмы может реализоваться также и в межзвездной среде [1], например, при аккреции льдинкой водяного пара. Скорость роста массы сферической пылинки

$$\frac{\partial M}{\partial t} = mJS, \quad (3)$$

где $S = 4\pi R^2$ – площадь ее поверхности, R – радиус, J – плотность потока атомов на поверхность. Переписывая уравнение (3) в виде $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{M}{\tau_M}$, получаем, что характерное время роста массы $\tau_M = M/mJS$. Радиус пылинки зависит от ее массы, поэтому решение (3) дает линейное по времени увеличение радиуса пылинки.

Время набора энергии. Оценим характерное время τ_T набора первоначально покоившейся пылинкой энергии того же порядка, что и энергия атомов равновесного газа. Суммируя квадраты импульса попавших в пылинку атомов и учтя, что их средний квадрат импульса в равновесном газе равен $4mT$, получаем

$$\tau_T = 3M/4mJS = 3\tau_M/4. \quad (4)$$

Характерные времена набора энергии τ_T и роста массы τ_M для пылинок совпадают с точностью до множителя $3/4$. Неравновесность газа и отражение атомов приводит лишь к незначительной вариации этой константы. Это же время определяет время выравнивания температур пылевой компоненты и газа, а также длину "свободного" пробега и частоту "столкновений" частицы.

Одна из основных проблем, возникающих при постановке задачи о броуновском движении макрочастицы в газе (или плазме), – это формулировка граничных условий. Вопросу взаимодействия газа с поверхностью твердого тела (пылинки) посвящено много экспериментальных и теоретических работ, но наиболее часто используются модели зеркального и диффузного отражения, предложенные Максвеллом в 1879 г. Рассмотрим несколько типов граничных условий для задачи моделирования броуновского движения пылинки в идеальном газе [1, 2].

Модель упругой частицы – зеркальное отражение атомов. В определенных условиях поверхность твердого тела может упруго отражать падающие на нее атомы. Но зеркальное отражение реализуется только для хорошо обработанных поверхностей [2], и такая ситуация не характерна для пылевой плазмы. Форма поверхности пылинок в плазме напоминает цветную капусту и даже при упругом взаимодействии атом в процессе отражения сталкивается с пылинкой несколько раз [3].

Модель диффузного отражения. В модели шероховатых сфер частица упруго отражает падающие на нее атомы, меняя только их направление [2]. Такая ситуация не реализуется в условиях пылевой плазмы из-за неупругого характера взаимодействия атомов с поверхностью при высоких температурах. Наиболее близкой к реальности является модель шероховатой сферы с частичной аккомодацией энергии и введением доли зеркально отраженных атомов. Но такая модель сложна и использует аппроксимирующие параметры – коэффициент аккомодации энергии и долю зеркально отраженных атомов.

Модель поглощающей (липкой) частицы. Частица в такой модели поглощает все попадающие в нее атомы. Масса и скорость частицы после акта поглощения атома определяются из законов сохранения массы и импульса:

$$M' = m + M,$$

$$V' = (mv + MV)/(m + M). \quad (5)$$

Но даже при хорошей абсорбции частица поглощает не все попадающие в нее атомы и необходимо учитывать обратный процесс – потерю массы. Поэтому рассмотрим предельный случай полной потери всех неупруго сталкивающихся с частицей атомов.

Модель неупругой частицы постоянной массы может использоваться для описания реального неупругого взаимодействия при отсутствии абсорбции. В этом случае массу и скорость частицы после столкновения будем определять из законов сохранения массы и импульса в двухстадийном процессе.

На первой стадии происходит неупругое поглощение атома, на второй стадии частица теряет этот атом. Для описания первой стадии будем использовать модель липкой частицы (5).

На второй стадии, при потере массы

$$M'' = M' - m$$

рассмотрим три модели для определения скорости частицы после потери массы.

Предполагая при потере массы сохранение частицей скорости:

$$V'' = V', \quad (6)$$

получаем модель мягкой частицы. Потеря энергии частицей за акт составляет $\Delta K = (m/M)K'$. За время τ_T (4) частица потеряет энергию $9T/8$. Следовательно, эффективная сила трения из-за потери массы сопоставима со средней ланжевеновской силой случайных толчков со стороны атомов. Физически эта модель соответствует максвелловскому излучению атомов при низкой температуре вещества пылинки.

Демонической частицей (аналогично демону Максвелла) будем называть частицу, которая поглощает и теряет массу и импульс по некоторым логическим правилам. Этот случай не реализуется в термодинамике, но он соответствует некоторым теоретическим моделям, и соответствующие расчеты имеют смысл для проверки теории. Кроме того, в открытой системе пылинка подвергается воздействию неравновесных потоков различной природы и закон испускания не соответствует условию взаимности. Поэтому реальная пылинка вполне может быть частицей демонического типа.

Предполагая при потере массы сохранение частицей всего импульса (частицы и связанного с ней атома), получаем, что ее скорость и энергия равны

$$V'' = V'(1 + m/M), \quad K'' = K'(1 + m/M)^2. \quad (7)$$

Это модель демонической частицы, энергия которой после акта потери массы увеличивается. Увеличение энергии частицей за акт составляет $\Delta K \approx 2(m/M)K'$. За время τ_T (4) частица из-за такого механизма потери массы приобретет энергию порядка $2T$.

Эффективная сила ускорения из-за потери массы для массивной частицы сравнима со средней ланжевеновской силой случайных толчков со стороны атомов.

Предполагая сохранение частицей при потере массы всей кинетической энергии (частицы и залипшего атома, движущихся как целое), получаем значение для модуля скорости:

$$V'' = V'(1 + m/M)^{1/2}. \quad (8)$$

Это также модель демонической частицы, которая при потере массы сохраняет энергию, но скорость ее после акта потери массы увеличивается. Эффективная сила ускорения из-за потери массы для массивной частицы и в этом случае по порядку величины сравнима со средней ланжевеновской силой, но примерно в два раза меньше, чем при вычислении скорости по формуле (7).

Рассмотрим случай одномерного движения, когда частицы могут перемещаться только вдоль одного направления x . Положим массу атомов m и их числовую плотность N равными единице, частицу представим в виде тонкого плоского листа единичной площади с массой M .

Модель локализованной броуновской частицы. Предельный случай бесконечно узкой и глубокой потенциальной ямы соответствует тому, что частица (лист) находится в одной точке пространства $x = 0$, бесконечно часто меняя направление движения. Попадающие в эту фиксированную по x точку пространства атомы газа определяют энергию частицы.

Скорость частицы после столкновения с атомом определяется правилом поглощения импульса, массы, функцией распределения падающих атомов и направлением ее скорости в момент столкновения. Направление скорости локализованной частицы в момент столкновения полагается случайным и равновероятным. Но если модуль скорости частицы оказывается больше скорости атома, то, естественно, направление движения частицы выбирается навстречу атому.

Помимо максвелловского распределения атомов (1), в расчетах будем использовать также моноэнергетическое распределение атомов по скоростям V вдоль направления x :

$$f_0(V) = \delta(V - V_0), \text{ при } x < 0$$

$$f_0(V) = \delta(V + V_0), \text{ при } x > 0.$$

В единицу времени с плоским листом единичной площади столкнется $J_0 = 2V_0N$ атомов. При выборе $m = T = V_0 = 1$ средняя энергия атомов в объеме у максвелловского и моноэнергетического распределений совпадает. Отметим, что для моноэнергетического

распределения атомов нет различия в средней по объему энергии атомов и средней энергией сталкивающихся с поверхностью атомов (это верно только в одномерном случае).

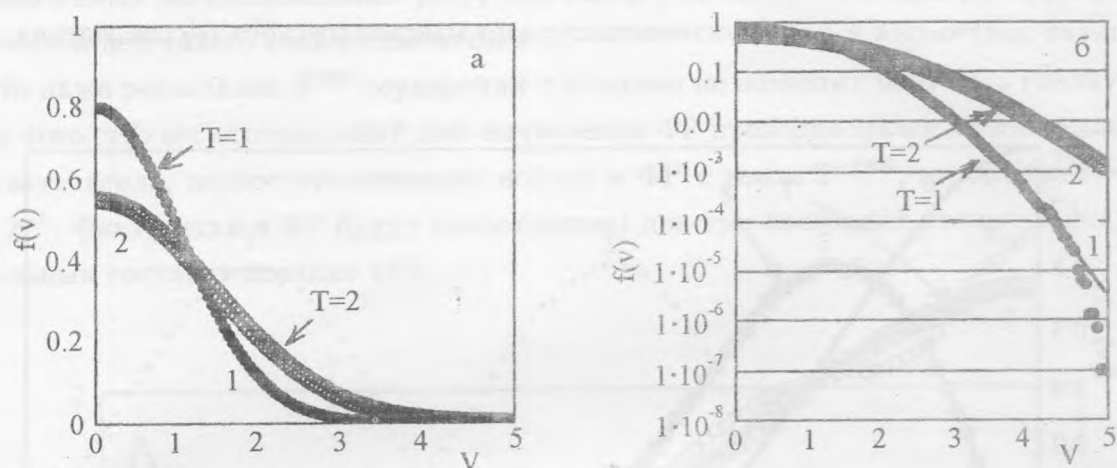


Рис. 1. ФР массивной локализованной частицы, упруго сталкивающейся с атомами, распределенными по Максвеллу (1) и моноэнергетическими атомами (2). Сплошные кривые 1, 2 – ФР Максвелла при $T=1$ и 2, точки и кружочки – результаты расчета. а) линейный масштаб, б) логарифмический.

Расчеты упругой локализованной частицы. Для удобства представления на одном графике расчетов частиц различной и переменной массы, на всех графиках скорость будем нормировать на тепловую скорость V_T при $T = 1$, т.е. на $M^{-1/2}$. Вначале рассмотрим результаты расчетов для массивной частицы при упругом столкновении с атомами единичной массы. На рис. 1 представлены результаты расчетов ФР по скоростям частицы с массой $M = 1000$ при упругом столкновении с атомами. Выполнены расчеты для двух типов распределений атомов: равновесного с $T = 1$ и моноэнергетического с $K = 0.5$. Соответственно, на частицу воздействовал максвелловский поток (2) со средней кинетической энергией падающих атомов $\langle K \rangle = 1$ и поток моноэнергетических атомов с $\langle K \rangle = 0.5$. В обоих случаях полученное в численном эксперименте распределение частицы по скоростям является максвелловским с очень хорошей точностью, но температуры отличаются в два раза. Для максвелловского потока после розыгрыша миллиона столкновений $\langle K \rangle = 1.0244$, после розыгрыша ста миллионов столкновений $\langle K \rangle = 0.9947$, а для моноэнергетического, соответственно, $\langle K \rangle = 0.4720$ и $\langle K \rangle = 0.5002$. Графики ФР, построенные в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах, демонстрируют совпадение с максвелловским распределением во всей области, в том числе и

на экспоненциально малых хвостах ФР. Таким образом, есть основание утверждать, что у массивной локализованной частицы устанавливается максвелловское распределение с температурой, равной средней кинетической энергии падающих атомов. Аналогичный результат получается и для двухтемпературного максвелловского распределения.

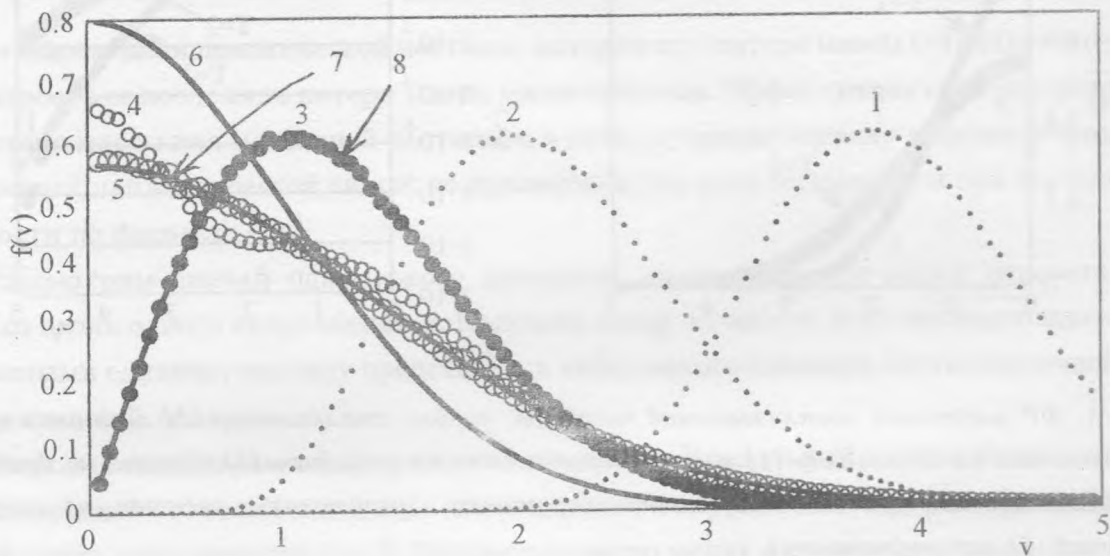


Рис. 2. ФР локализованной частицы, упруго сталкивающейся с атомами максвелловского потока. $M = 0.1; 0.3; 1; 2; 20$ (кривые 1-5). Приведены также ФР Максвелла при $T=1; 2$ (кривые 6, 7) и ФР максвелловского потока с $T=1$ (кривая 8).

На рис. 2 приведены ФР частицы по скоростям при воздействии на нее максвелловского потока с $T=1$, но при разных массах частицы: $M = 0.1, 0.3, 1, 2, 20$ (кривые 1-5). Для больших масс, начиная с $M \gg 10$, ФР близка к распределению Максвелла с $T=2$ (кривая 7). Для малых масс она от него радикально отличается. Для $M=1$ ФР частицы совпадает с распределением падающих атомов (2), средняя кинетическая энергия частицы после розыгрыша миллиона столкновений $\langle K \rangle = 0.9994$. Приведено также распределение Максвелла с $T=1$ (кривая 6). Для частиц с малой массой наблюдаемое увеличение средней энергии обусловлено эффектом ускорения Ферми [8].

Расчеты липкой локализованной частицы. Простейшая модель липкой частицы не позволяет в вычислительном эксперименте получить ФР из-за того, что число столкновений частицы пропорционально двоичному логарифму времени. Для вычисления гладкой ФР необходимо усреднение по крайней мере тысячи времен набора энергии

τ_T , соответственно, частица тысячу раз должна удвоить свою массу, а для этого необходим розыгрыш примерно 2^{1000} соударений с атомами, что невозможно как из-за ограниченных вычислительных ресурсов, так и с точки зрения здравого смысла – во Вселенной нет такого количества атомов.

Но даже реализация 2^{1000} соударений с атомами не позволит получить гладкую ФР из-за того, что вес столкновений при вычислении ФР пропорционален их длительности, соответственно, первое столкновение войдет в ФР с весом 2^{-1000} , а последнее – с весом 2^{-1} . Фактически в ФР будут представлены два-три последних столкновения, доля остальных составит порядка 10%.

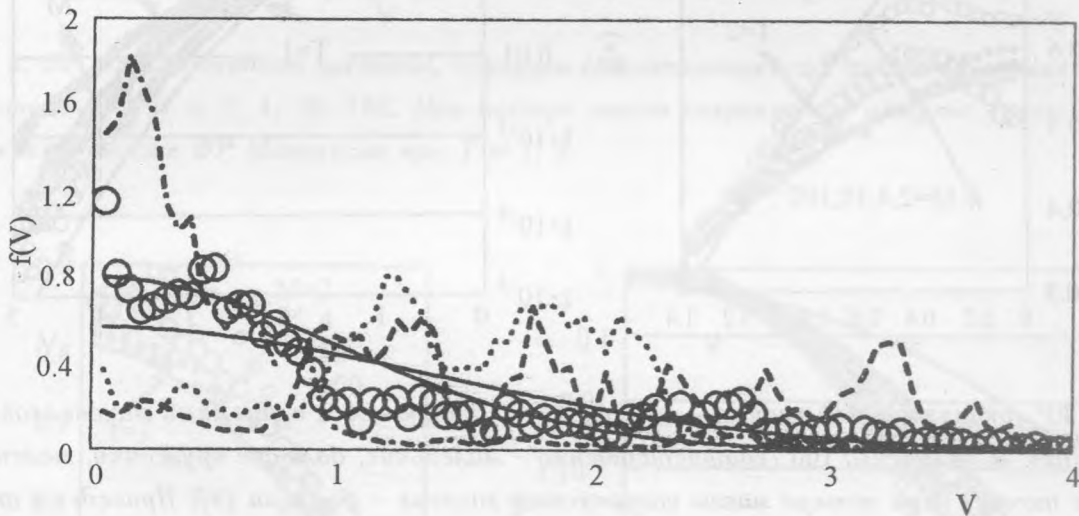


Рис. 3. Три расчета ФР липкой локализованной частицы с начальной массой $M(0) = 10$; различающиеся последовательностью случайных чисел (пунктир, штрихи, штрих-пунктир). Кружки – другой способ усреднения (см. текст). Приведены также ФР Максвелла при $T = 1$ и $T = 2$.

На рис. 3 приведены ФР при воздействии на липкую частицу с начальной массой $M = 10$ максвелловского потока с $T = 1$. Приведены данные трех расчетов, которые отличались последовательностью случайных чисел при розыгрыше скоростей атомов. В каждом из расчетов разыгрывался миллион соударений с атомами, что соответствовало примерно двадцати столкновениям частицы (времен τ_T). Полученные распределения, в полном соответствии с вышесказанным, представляют результат усреднения двух – трех последних столкновений. Для сравнения большими кружочками нанесен результат усреднения двадцати расчетов с одним столкновением при начальной массе частицы

$M = 100$. Хотя и очень грубо, но вычисленная ФР качественно соответствует максвелловской ФР. В первых трех расчетах $\langle K \rangle = 0.45, 1.22, 2.20$. В расчете с двадцатью усреднениями $\langle K \rangle = 0.95$, что значительно ближе к точному значению $\langle K \rangle = 1$, хотя число соударений частицы с атомами – 2000, вместо миллиона в первых трех расчетах.

Расчеты неупругой локализованной частицы постоянной массы. Рассмотрим результаты расчетов липкого поршня в бесконечно узкой и глубокой потенциальной яме при условии потери им массы после неупругого столкновения.

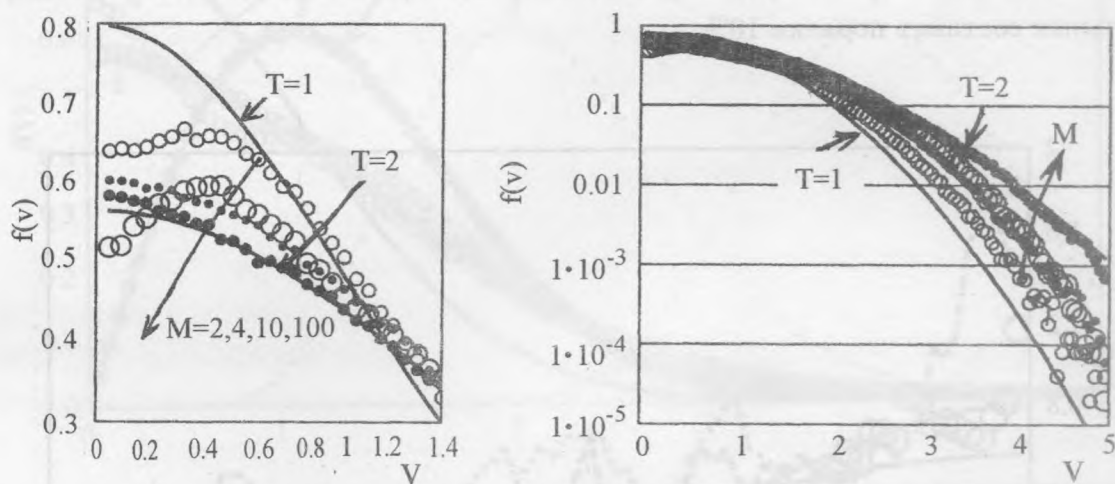


Рис. 4. ФР локализованной частицы, неупруго сталкивающейся с атомами максвелловского потока при $M = 2; 4; 10; 100$ (соответственно – маленькие, большие кружочки, маленькие, большие точки). При потере массы сохраняется энергия – формула (8). Приведены также ФР Максвелла при $T = 1; 2$.

На рис. 4 приведены ФР локализованной частицы, неупруго сталкивающейся с атомами максвелловского потока при $M = 2, 4, 10, 100$. При потере массы сохраняется энергия – скорость частицы после потери атома определяется по формуле (8). Приведены также ФР Максвелла при $T = 1; 2$. При малых массах наблюдается значительное отклонение от максвелловского распределения; начиная с $M = 100$, ФР совпадает с равновесной, но температура получается в два раза выше, чем температура газа.

На рис. 5 приведены расчеты с теми же параметрами, но другим способом потери массы: у частицы сохраняется импульс – ее скорость после потери атома определяется по формуле (7). ФР радикально отличаются от равновесной.

На рис. 6 приведены расчеты с теми же параметрами, но другим способом потери массы: у частицы сохраняется скорость – ее скорость после потери атома не меняется.

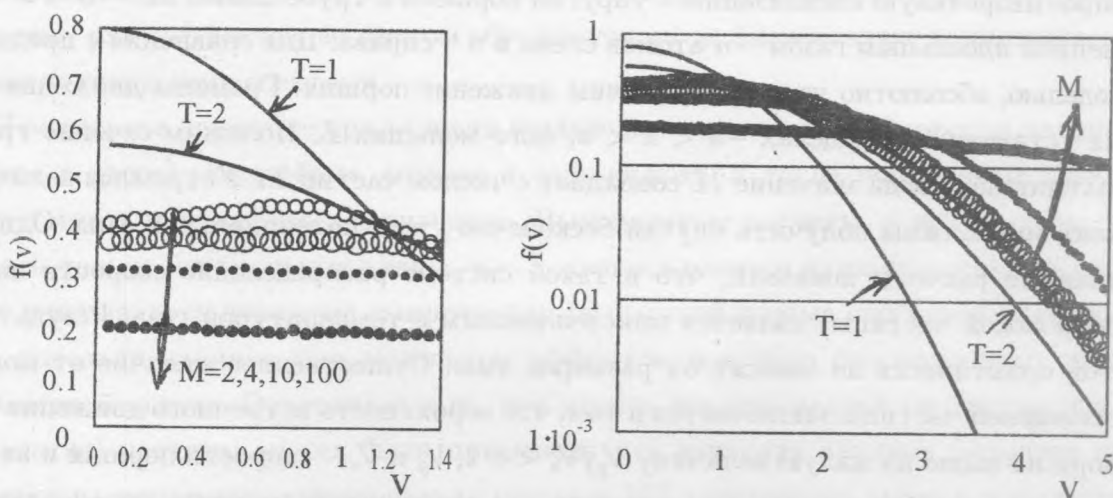


Рис. 5. ФР локализованной частицы, неупруго сталкивающейся с атомами максвелловского потока при $M = 2; 4; 10; 100$. При потере массы сохраняется импульс – формула (7). Приведены также ФР Максвелла при $T = 1; 2$.

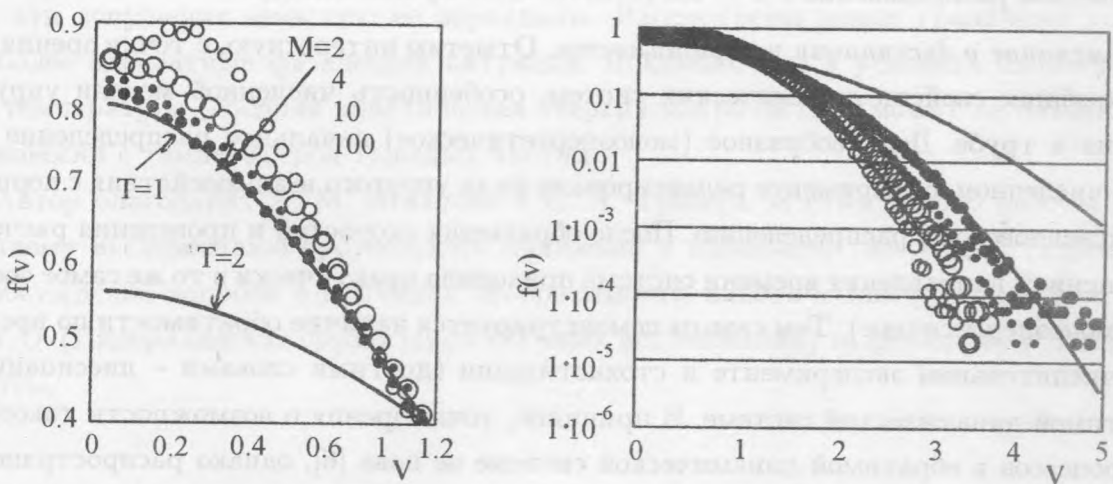


Рис. 6. ФР локализованной частицы, неупруго сталкивающейся с атомами максвелловского потока при $M = 2; 4; 10; 100$. При потере массы сохраняется скорость – формула (6). Приведены также ФР Максвелла при $T = 1; 2$.

ФР несколько отличаются от равновесной только для масс $M = 2; 4$, для $M = 10; 100$ она является равновесной с температурой газа.

Модель поршня в трубе с идеальным газом. Рассмотренная выше задача является идеализацией и не учитывает перемещения броуновской частицы. Рассмотрим физиче-

ски непротиворечивую идеализацию – упругий поршень в трубе длины $2L$: $-L < x < L$, заполненной идеальным газом – n атомов слева и n – справа. Для сравнения с предыдущей моделью, абсолютно упруго ограничим движение поршня. Границы движения для поршня установим в пределах $-a < x < a$, много меньших L . Положим сечение трубы равным единице, тогда значение $2L$ совпадает с числом частиц $2n$. Устремляя величину a к нулю, мы должны получить случай бесконечно узкой потенциальной ямы. Однако, выполненные расчеты показали, что в такой системе распределение скорости поршня (броуновской частицы) является максвелловским с температурой газа. Результаты расчетов практически не зависят от размеров ямы. Существенное отличие от модели локализованной частицы заключается в том, что вероятность встречного движения атома и поршня выше на малую величину $V_g/V_a \ll 1$, V_g и V_a – скорости поршня и атома. Хотя она и стремится к нулю, тем не менее, как показывают расчеты, определяющим образом влияет на результат.

Аналогичный численный эксперимент с липким поршнем и вбрасыванием новых атомов с распределением по скоростям (2) привел к тому, что для поршня устанавливается равновесное распределение с $T = 0.6$ (с точностью лучше 0.01%).

Замечание о диссипации и обратимости. Отметим интересную, с точки зрения изучения общих свойств динамических систем, особенность численной модели упругого поршня в трубе. Дельтаобразное (моноэнергетическое) начальное распределение атомов в численном эксперименте релаксировало из-за упругого взаимодействия с поршнем к максвелловскому распределению. После обращения скоростей и проведения расчета с обращением направления времени система приходила практически в то же самое состояние (моноэнергетичное). Тем самым демонстрируется наличие обратимости по времени в вычислительном эксперименте и стохастизации (другими словами – диссипации) в обратимой динамической системе. В принципе, точка зрения о возможности такого рода процессов в обратимой динамической системе не нова [6], однако распространено и обратное мнение – что диссипация (релаксация к распределению Максвелла) невозможна в динамических (обратимых) системах из-за сохранения энтропии. Возможность в численном эксперименте получить практически полную обратимость обусловлена тем, что в одномерном случае нет экспоненциально быстрого разбегания фазовых траекторий системы.

Рассмотренные одномерные задачи имеют методический интерес и для исследования реальных свойств пылевых частиц необходимо рассмотрение трехмерного движения. Первоначальное исследование проводилось для трехмерных систем. Но проблемы набо-

ра необходимой статистики и невозможность получения точного результата приводили к целому ряду эффектов, во многом обусловленных не физическими причинами, а чисто вычислительными аспектами.

Трехмерное движение при условии независимости компонент скорости частицы (гипотеза о хаосе) может быть сведено к одномерному и тогда полученные результаты могут иметь и практическое значение. Выполненные расчеты, в которых рассматривались только центральные удары, т.е. полагался равным нулю прицельный параметр и не учитывалось вращение макрочастиц (в пылевой плазме оно играет важную роль [1]), показали наличие всех модельных эффектов, подробно рассмотренных выше для одномерной задачи. Отметим только, что модель локализованной (ограниченной в пространстве) частицы может быть применена для изучения влияния размеров счетной области на результат моделирования методом МД трехмерных задач и поведения левитирующей частицы [10]. Подробное исследование будет приведено в отдельной работе.

Выполненное численное моделирование является попыткой применения методов моделирования из первопринципов для выяснения применимости обычно используемых при построении кинетических теорий допущений. Численные результаты показывают, что эти допущения зачастую не оправданы. Рассмотрены новые граничные условия, наиболее адекватные физической ситуации. Показано, что в условиях пылевой плазмы температура (средняя кинетическая энергия макрочастиц) может не находиться в равновесии с температурой тяжелых частиц.

Автор благодарит А. М. Игнатову и С. А. Триггера за стимуляцию работы по численному исследованию броуновского движения в идеальном газе, Д. С. Чернавского за обсуждение вопроса о причинах необратимости кинетических уравнений, а также N.W.O. (Нидерландская организация научных исследований) за финансовую поддержку работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С п и т ц е р Л. Физические процессы в межзвездной среде. М., Мир, 1981.
- [2] Б е р д Г. Молекулярная газовая динамика. М., Мир, 1981.
- [3] Ц ы т о в и ч В. Н. УФН, **167**, N 1, 57 (1997).
- [4] I g n a t o v A. M., T r i g g e r S. A. URL address: arxiv.org/abs/physics/0006072.
- [5] Z a g o r o d n y A., S c h r a m P. P. J. M., T r i g g e r S. A. Phys. Rev. Lett., **84**, No. 16, 3594 (2000).

- [6] Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика. М., Мир, 1980.
- [7] Игнатов А. М., Майоров С. А., Тригер С. А., Шрам П. П. Дж. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7, 7 (2000).
- [8] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984; Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М., Наука, 1988.
- [9] Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методами частиц. М., Мир, 1987.
- [10] Владимиров С. В., Крамер Н., Майоров С. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 33 (2000).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 14 декабря 2000 г.