

ДИФРАКЦИЯ НА ИДЕАЛЬНОМ КЛИНЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

А. В. Боровский¹, А. Л. Галкин²

Проведено численное исследование дифракции электромагнитной волны с ТЕ и ТМ поляризациями на идеально проводящем клине с произвольным углом при вершине. Исследование включает разработку математической модели для расчета амплитуды и интенсивности дифракционного поля. Решение построено во всей области физических углов без ограничений на удаленность точки наблюдения. Исследованы эффекты дифракции и интерференции поля вблизи стенок клина.

Ключевые слова: строгая теория дифракции, численное моделирование дифракции на клине.

Введение. Разработка методов решения задач дифракции восходит к трудам [1–10]. Задача дифракции на клине является классической задачей теоретической и математической физики [11–14]. Постановка задачи дифракции на клине в двумерном стационарном случае включает уравнение Гельмгольца, частными решениями которого являются дифракционные интегралы Зоммерфельда–Франка–Мизеса. Краевая задача для уравнения Гельмгольца может включать условия I рода (задача Дирихле, плоская волна ТЕ поляризации), условия II рода (задача Неймана, плоская волна ТМ поляризации), условия III рода (задача смешанного типа с импедансными условиями [15, 16]). Изучению строгих задач дифракции посвящены также работы [17–19]. Постановка задачи дифракции на клине и некоторые ее следствия описаны в курсе [20]. Начиная с [21], проводится изучение дифракции в рамках геометрической теории.

Построение решений всех трех задач использует дифракционные интегралы. Поскольку период дифракционных интегралов T связан с углом раствора клина δ соотношением $T = 2\pi r = 2(2\pi - \delta)$, в литературе исследовались в основном случаи целых

¹ Байкальский государственный университет экономики и права (БГУЭП), кафедра информатики и кибернетики, 664003 Россия, Иркутск, ул. Ленина, 11.

² ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

значений числа p : $p = 1$ ($\delta = \pi$) – плоскость; $p = 2$ ($\delta = 0$) – полуплоскость; $p = 3/2$ ($\delta = \pi/2$) – прямоугольный клин.

Краевые задачи дифракции имеют практическую направленность и могут быть использованы для моделирования взаимодействия оптических (лазерных) пучков с краями металлических оправ и диафрагм [5]. Особый интерес представляет разработка методов расчета интенсивности дифракционного поля, которую можно измерить экспериментально. В практическом плане задачу дифракции на клине можно использовать для оценки оптических шумов в некоторых оптических приборах. Используется эта задача также в радиофизике в теории антенн и рассеивателей, в радиолокационных задачах, в системах посадки и наведения летательных аппаратов [7, 8]. Отдельное применение данная задача имеет в акустике [16, 18].

Целью данной работы является изучение некоторых малоизвестных представлений задачи, удобных для проведения численных расчетов, и исследование на их основе дифракции плоской волны на идеально проводящем клине с произвольным углом при вершине с граничными условиями I и II рода.

Постановка задачи. Рассмотрим клин с углом при вершине $\delta < \pi$, рис. 1. Случай $\delta > \pi$ приводит к уголкового отражателю и здесь не рассматривается. На клин падает внешняя плоская электромагнитная волна, характеризуемая волновым вектором \mathbf{k} . В полярной системе координат вектор \mathbf{k} задается модулем $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны, и полярным углом α . (По ряду причин удобнее использовать угол Зоммерфельда $\gamma = \alpha - \pi$.) Точка наблюдения задается модулем радиус-вектора $r = |\mathbf{r}|$ и полярным углом φ .

Произвольное электромагнитное поле в двумерном случае можно представить в виде линейной суперпозиции полей, обладающих ТЕ (transverse electric) и ТМ (transverse magnetic) поляризациями [5]. Имеется в виду поперечность электрического или магнитного вектора плоскости падения волны, образованной волновым вектором и перпендикуляром к поверхности отражения. В случае ТЕ и ТМ волн действительные векторы напряженности электрического и магнитного полей, параллельных краю клина, определяются выражениями

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U_E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}], \quad H(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U_H(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].$$

Комплексные функции $U_E(\mathbf{r})$ и $U_H(\mathbf{r})$ являются решениями краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. Далее индексы E и H опустим.

Выражение для комплексной амплитуды $U(\mathbf{r})$ падающей плоской волны в полярных координатах имеет вид [3]

$$U_g^+(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta), \quad \rho = kr, \quad \theta = \varphi - \gamma. \quad (1)$$

Краевая задача дифракции ставится следующим образом: требуется найти решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0 \quad (2)$$

в области углов $0 < \varphi < 2\pi - \delta$ при любых значениях радиуса $0 < \rho < \infty$. На поверхностях клина ставится условие равенства нулю решения (условие I рода, для ТЕ волны) либо его производной по углу φ (условие II рода, для ТМ волны)

$$U|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \right). \quad (3)$$

Уравнение (2) имеет особые точки $\rho = 0$ и $\rho = \infty$, поэтому, для обеспечения ограниченности энергии в любой конечной области, в окрестности особых точек для решения краевой задачи с источниками волн на бесконечности на решение U ставятся интегральные условия Мейкснера и Зоммерфельда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \operatorname{Im} \left(U^* \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) d\varphi \right\} = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \left| \frac{\partial U}{\partial \rho} - iU \right|^2 d\varphi \right\} = 0. \quad (5)$$

Условия (4) и (5) обеспечивают единственность краевой задачи [16].

В силу линейности уравнения Гельмгольца решение краевой задачи можно разложить на сумму решений геометрической оптики и дифракционной составляющей

$$U = U_g + U_d. \quad (6)$$

Решения геометрической оптики выписаны, например, в [7, 8].

Общие решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. Частными решениями уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах являются плоские и цилиндрические волны $e^{\pm i\rho \cos \theta}$, $e^{\pm i\rho \cos \theta} / \sqrt{\rho}$, цилиндрические функции, а также, в силу

линейности уравнения, любые суперпозиции плоских волн в виде контурных интегралов в плоскости комплексных углов. Среди совокупности всех контурных интегралов выделяют “дифракционные интегралы” Зоммерфельда–Франка–Мизеса (ЗФМ), которые на бесконечности стремятся к плоским либо цилиндрическим затухающим волнам.

Исследование свойств дифракционных интегралов ЗФМ проведено в работах [3, 4, 16, 19]. Существует два вида интегралов ЗФМ. Дифракционные интегралы $U_T^C(\rho, \theta)$ с индексом C являются гладкими, непрерывными, четными, периодическими функциями с периодом T . Предполагается, что $T > 2\pi$. При $\rho \rightarrow \infty$ в диапазоне углов $|\theta| < \pi$: $U_T^C(\rho, \theta) \rightarrow e^{i\rho \cos \theta}$, а в диапазоне углов $\pi < |\theta| < T/2$: $U_T^C(\rho, \theta) \rightarrow 0$. Дифракционные интегралы с индексами D в пределах основного периода получаются из интегралов с индексами C вычитанием плоской волны, умноженной на функцию Хэвисайда, и являются кусочно-гладкими функциями. Точки разрывов возникают при значениях углов $|\theta| = \pi$

$$U_T^D(\rho, \theta) = U_T^C(\rho, \theta) - e^{i\rho \cos \theta} \Phi(\pi - |\theta|), \quad |\theta| < T/2, \quad (7)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В случае произвольных действительных чисел $p = T/2\pi$ справедливо следующее представление в виде рядов Фурье–Бесселя [4, 7, 19]

$$U_p^C(\rho, \theta) = \frac{1}{p} J_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{p} \exp\left(i \frac{\pi k}{2p}\right) \cos\left(\frac{k}{p} \theta\right) J_{k/p}(\rho). \quad (8)$$

В случае целых значений $p = n$ выражение (8) может быть преобразовано к виду

$$U_n^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta) \times \\ \times \frac{1}{n} \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} \cos\left(\theta \left(1 - \frac{m}{n}\right)\right) \exp\left(-i \frac{\pi m}{2n}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) \int_0^\rho e^{-i\xi \cos \theta} H_{m/n}^{(2)}(\xi) d\xi \right], \quad (9)$$

где $H_{m/n}^{(2)}(\xi)$ – функция Ханкеля. Доказательство эквивалентности (8) и (9) проведено в работе [19].

Решения краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в секторе можно представить в виде комбинации дифракционных контурных интегралов, которая удовлетворяет краевым условиям, а также условиям на бесконечности и в нуле

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_T^C(\rho, \varphi - \gamma) \mp U_T^C(\rho, \varphi + \gamma). \quad (10)$$

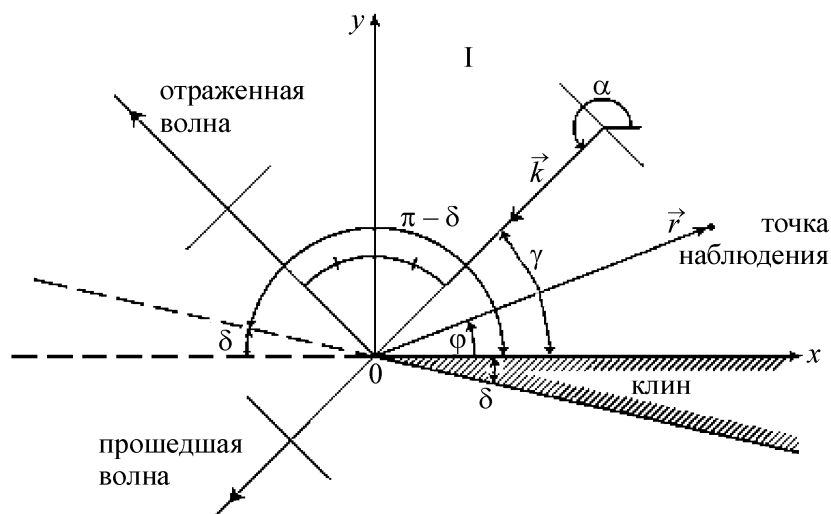


Рис. 1: Дифракция плоской волны на клине в области I.

Здесь знаки минус и плюс соответствуют задачам Дирихле и Неймана, а период T равен $T = 2(2\pi - \delta)$, где δ – угол при вершине клина. Представление (10) соответствует записи решения задачи в работе [7]. В выражении (10) индексы дополнительно указывают период дифракционного интеграла T и контур интегрирования C согласно [3, 4, 7, 19].

Интенсивность поля в задаче дифракции. Наблюдаемой величиной в задаче дифракции является интенсивность электромагнитной волны, которая равна модулю вектора Пойнтинга, усредненного по быстрым осцилляциям электромагнитного поля [5]

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{c}{8\pi} |\operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)|.$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} – стационарные комплексные амплитуды электрического и магнитного полей. Вычисление вектора Пойнтинга для дифракции ТЕ и ТМ волны представляет отдельную задачу, решение которой представлено, например, в работах [22, 23]. Конечное выражение для интенсивности в обоих случаях совпадает и имеет вид

$$I = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \rho} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \rho} \right]^2}. \quad (11)$$

Здесь интенсивность нормирована на интенсивность падающей плоской волны. Особенностью выражения (11) является независимость интенсивности от знака мнимой части решения уравнения Гельмгольца. Это позволяет не следить за знаком комплексной части решения, что несколько упрощает исследование.

Таким образом, в математической модели дифракции на клине с произвольным углом $\delta < \pi$ при вершине в области физических углов наблюдения и падения плоской

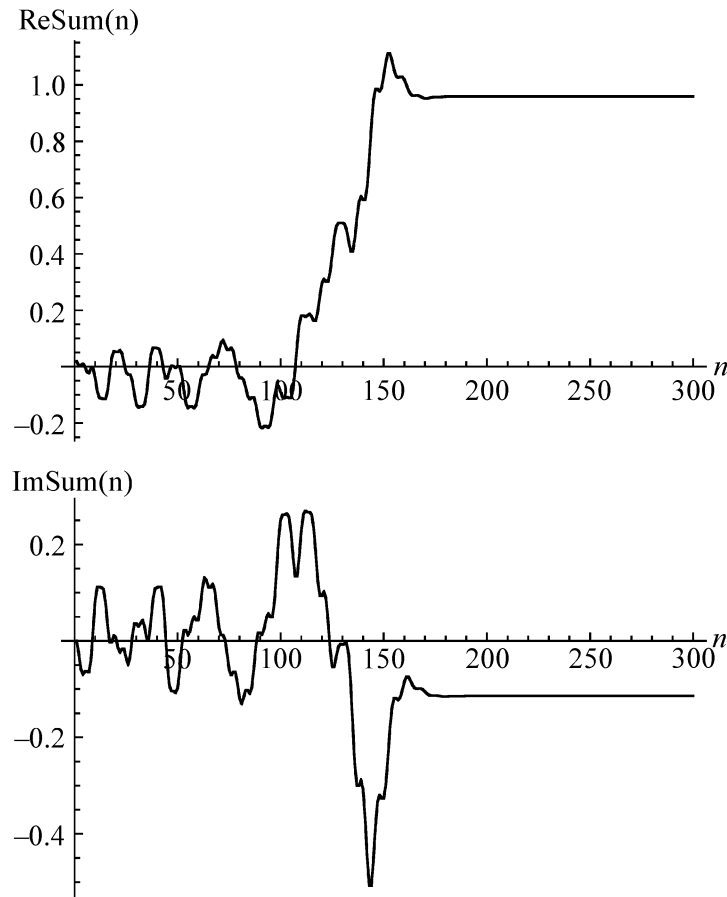


Рис. 2: Частичные суммы ряда (8) как функции числа членов ряда при значениях параметров $p = 3$, $\theta = \pi/3$, $\rho = 50$.

волны на клин $0 < \varphi, \gamma < 2\pi - \delta$ интенсивность (11) однозначно рассчитывается с помощью (8), (10). Эта модель положена в основу численного моделирования дифракции плоских ТЕ и ТМ волн на клине.

Результаты численных расчетов. Описание численных методов, применяемых для решения задач дифракции на клине, изложено в работе [24]. В данной статье рассчитывался дифракционный интеграл с индексом S методом рядов Фурье–Бесселя. Прямой расчет с использованием (8) потребовал учета не менее 150 членов ряда. На рис. 2 приведены графики действительной и мнимой частей для частичных сумм как функций номера n – числа слагаемых в сумме. Интерполяция на графике используется линейная. Значения параметров $p = 3$, $\theta = \pi/3$, $\rho = 50$, функция Бесселя взята из библиотеки стандартных программ. Сходимость ряда (8) слабо зависит от числа p в диапазоне $1 < p < 3$.

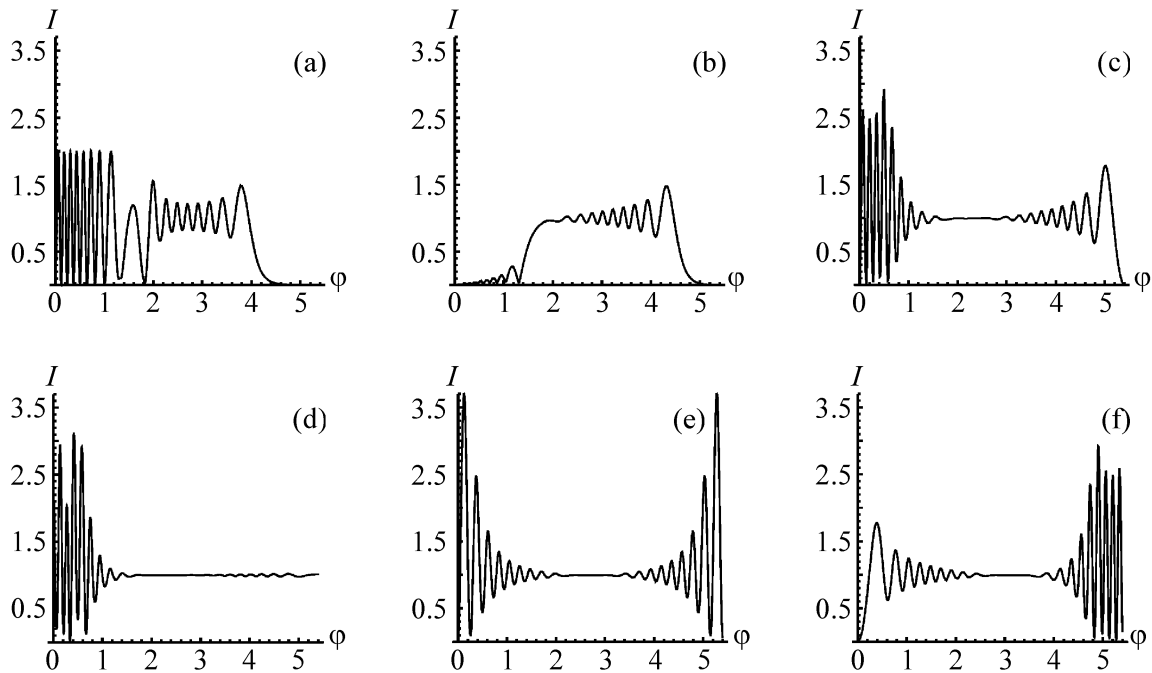


Рис. 3: Угловые распределения интенсивности. Дифракция плоской волны на клине с углом $\delta = 0.877$, $\rho = 30$: (a) $\gamma = \pi/3$ (TE); (b) $\gamma = \pi/2$ (TE); (c) $\gamma = \pi - \delta$ (TE); (d) $\gamma = \pi - \delta$ (TM); (e) $\gamma = \pi - \delta/2$ (TE); (f) $\gamma = \pi$ (TE).

Для расчета интенсивности применялись две отличающиеся схемы: 1) интерполяционная схема по углу φ с центральной разностью для вычисления производных по радиусу; 2) схема крест, согласно которой обе производные вычислялись как центральные разности. Указанные схемы позволили существенно повысить эффективность расчета интенсивности.

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования дифракции на клине с $\delta = 0.877$ для TE и TM волн. Характеристики дифрагирующих волн рассматриваются при $\rho = 30$. На рис. 3 показаны угловые распределения интенсивности. В зонах, где пересекаются две волны, падающая и отраженная от грани клина, видим картину интерференции. Интенсивность меняется от нуля до двух (рис. 3(a)), до трех (рис. 3(c),(f)) и даже до 3.7 (рис. 3(e)). В зонах, где имеется одна падающая волна (она же прошедшая), на каждом рисунке интенсивность близка к единице. На краях этой зоны при переходе к геометрической тени или к области с двумя пересекающимися волнами единичная интенсивность возмущена эффектом дифракции. Амплитуда дифракционных колебаний интенсивности может достигать величины 1.7.

На рис. 3(a) представлен случай падения плоской волны на верхнюю грань клина под углом $\pi/3$. Здесь имеется только одно отражение от верхней грани клина. В связи с этим имеется одна зона интерференции, зона падающей (прошедшей) волны, которая плавно переходит в область тени. На рис. 3(b) представлен вариант нормального падения плоской волны на верхнюю грань клина. Здесь падающая и отраженная от верхней грани клина волны гасят друг друга, поэтому интенсивность в зоне интерференции существенно меньше единицы. Имеется зона падающей волны с интенсивностью, близкой к 1, которая при переходе в область тени возмущена дифракцией. На рис. 3(c) показан вариант падения плоской ТЕ волны, имеющей волновой вектор, параллельный нижней грани клина. Здесь имеется зона интерференции с размахом амплитуды интенсивности от нуля до трех, зона падающей (прошедшей) волны с интенсивностью близкой к единице и зона дифракции вблизи нижней грани клина. Электромагнитное поле ТЕ волны отжимается от нижней грани и поэтому размах дифракционных максимумов достигает величины 1.7. Он несколько больше, чем в случае, когда имеется зона тени, между краем прошедшей плоской волны и нижней стенкой клина. На рис. 3(f) показан зеркально-симметричный вариант, соответствующий волновому вектору исходной ТЕ волны, параллельному верхней грани клина. На рис. 3(d) представлен вариант, аналогичный случаю рис. 3(c), только для ТМ волны. Здесь поле не обращается в ноль на нижней грани. Наблюдается эффект подавления дифракции вблизи нижней стенки клина.

На рис. 3(e) представлен симметричный вариант, когда плоская волна падает под углом $\gamma = \pi - \delta/2$. В этом случае происходят два отражения под одинаковыми углами от разных граней клина.

Выводы:

1. На основе известных решений задачи дифракции на клине [3, 4, 7] разработана математическая модель для численного расчета амплитуды и интенсивности дифракционного поля для клина с произвольным углом раствора при произвольном угле падения плоской волны. Рассчитаны характеристики дифракции как в дальней, так и в ближней зонах.

2. Обнаружен эффект отталкивания (отжимания) электромагнитного поля поверхностью клина в случае, когда волновой вектор падающей плоской ТЕ волны направлен вдоль этой поверхности.

3. Обнаружен эффект уменьшения дифракционных колебаний интенсивности электромагнитного поля вблизи поверхности клина для случая скользящего падения ТМ волны.

Авторы благодарят А. Н. Бородин, указавшего на существование проблемы.

Работа частично поддержана ФСМФП грант R/21000.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] G. Kirchhoff, *Ann. Physik* **18**, 663 (1883).
- [2] A. Sommerfeld, *Mathematische Annalen* **47**, 317 (1896).
- [3] А. Зоммерфельд, *Оптика* (М., ИЛ, 1953).
- [4] Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики* (М., ОНТИ, 1937).
- [5] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики* (М., Наука, 1973).
- [6] Г. Гринберг, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений* (М., Изд. АН СССР, 1948).
- [7] Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны* (М., Радио и связь, 1990).
- [8] П. Я. Уфимцев, *Теория дифракции краевых волн в электродинамике* (М., Изд. "Бином", 2012).
- [9] М. А. Леонтович, В. А. Фок, *ЖЭТФ* **16**, 557 (1946).
- [10] В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн* (М., Наука, 1970).
- [11] G. Green, *Mathematical papers of the late George Green* (Ferrers, London, 1871).
- [12] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции* (М., Физматгиз, 1959).
- [13] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики* (М., Наука, 1972).
- [14] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики* (М., Наука, 1982).
- [15] Г. Д. Малюжинец, *ДАН СССР* **118**, 1099 (1958).
- [16] В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда–Малюжинца в теории дифракции* (Санкт-Петербург, Изд. СПбГУ, 2003).
- [17] В. В. Котляр, Д. В. Нестеренко, в сб. *Материалы 26-й школы по когерентной оптике и голографии, Иркутск, 2007* ("Папирус", Иркутск, 2008), с. 371.
- [18] В. М. Бабич, А. А. Мацковский, *Записки научных семинаров ПОМИ*, Санкт-Петербург, **369**, 5 (2009).
- [19] А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин, *Математическая дифракция плоской волны на идеально проводящем клине* (Иркутск, Изд. БГУЭП, 2013).

- [20] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1982).
- [21] J. V. Keller, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 116 (1962).
- [22] А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин, *Известия ИГЭА (БГУЭП)*, электронный научный журнал, № 4, (2012).
- [23] А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин, *Известия ИГЭА (БГУЭП)*, № 5, 124 (2012).
- [24] А. В. Боровский, А. Л. Галкин, *Известия ИГЭА (БГУЭП)*, электронный научный журнал, № 1, (2013).

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.