

УДК 621.315.592;537.311.322

О ВОЗМОЖНОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУХБАРЬЕРНЫХ РТД СТРУКТУРАХ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ БАРЬЕРАМИ КОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ И ШИРИНЫ

В. А. Чуенков

Построена аналитическая теория взаимодействия инжектируемого моноэнергетического потока электронов с сильным переменным электрическим полем в двухбарьерных РТД структурах с несимметричными барьерами конечной высоты и ширины. Вычислены токи поляризации, дана оценка мощности генерации электромагнитного излучения.

Ключевые слова: туннелирование, РТД структура, токи поляризации.

Задача о туннелировании электронов в двухбарьерных структурах (РТД структурах) с дельта-функциональными барьерами в слабом переменном электрическом поле $eEa < \hbar\omega$ (E и ω – соответственно, амплитуда и частота переменного поля, a – ширина квантовой ямы) решалась в целом ряде работ (напр., в [1–3]).

Для РТД структур с симметричными барьерами конечной высоты и ширины такая задача решена в [4]. В сильном электрическом поле, когда

$$eEa \leq \hbar\omega, \quad \varepsilon_r > eEa, \Gamma, \hbar\omega \quad (1)$$

(ε_r и Γ – соответственно, энергия и полуширина резонансных уровней), задача о туннелировании электронов в РТД структурах с дельта-функциональными барьерами решена в [5].

В данной работе эта задача решается для РТД структур с несимметричными барьерами конечной высоты и ширины. На рис. 1 изображена схема такой структуры.

1. Решение уравнения Шредингера для электронов в РТД структурах с несимметричными барьерами конечной высоты и ширины в сильном переменном электрическом поле. Слева ($x < 0$) к структуре (см. рис. 1) подводится поток электронов, про-

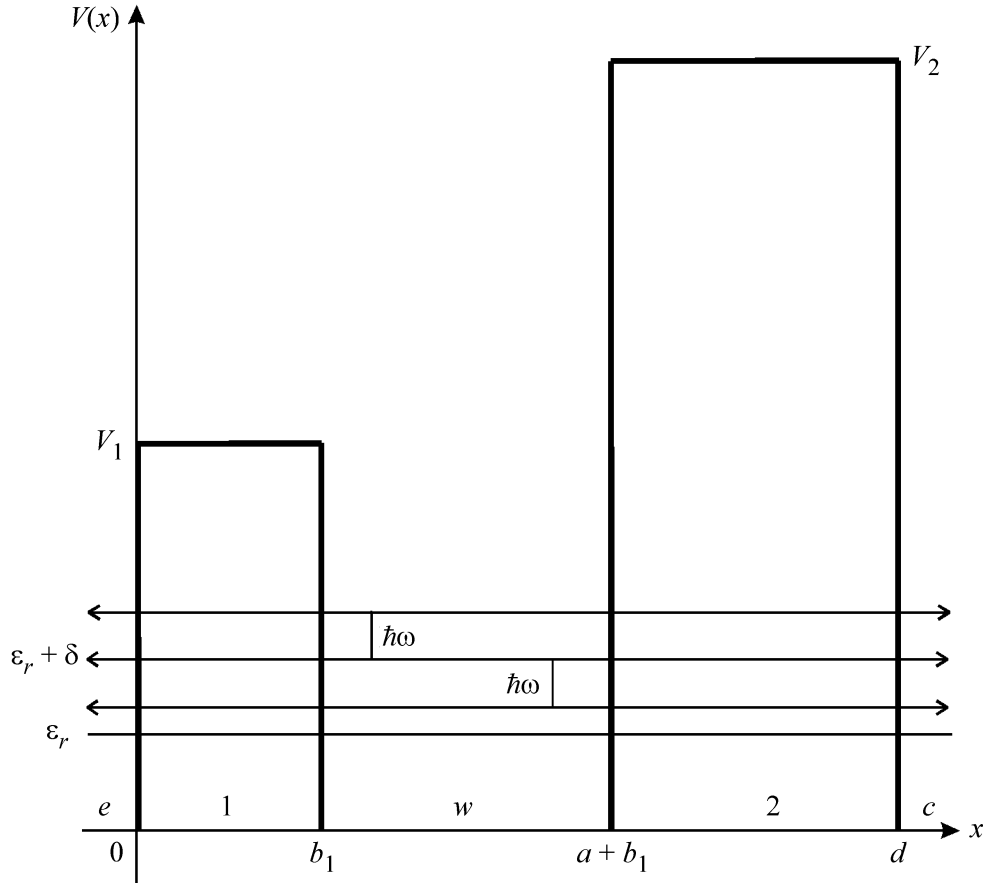


Рис. 1: Двухбарьерная резонансно-туннельная структура с резонансным уровнем ε_r .

порциональный q^2 , с энергией ε , мало отличающейся от энергии резонансного уровня ε_r ($\varepsilon - \varepsilon_r = \delta \ll \varepsilon_r$). В области РТД действует переменное электрическое поле $E(t) = E \cos \omega t$ с частотой ω и потенциалом

$$U(x, t) = U(x) \cos \omega t, \quad U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ -eEx, & 0 < x < d; \\ -eEd, & x > d. \end{cases} \quad (2)$$

Волновая функция электронов удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi + U(x, t)\Psi, \quad (3)$$

где (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} m(x) &= m(x < 0, b_1 < x < a + b_1, x > d), \\ m(x) &= m_b(0 < x < b_1, a + b_1 < x < d). \end{aligned} \quad (4)$$

В квазиклассическом приближении при условии (1) решение уравнения Шредингера (3) в указанных на рис. 1 областях значений x запишем в виде (см. [5]):

$$\Psi_e(x, t) = q \exp(-i\omega_0 t + ikx) + \exp(-i\omega_0 t - ikx) \cdot f_e \left(-\frac{x}{v} - t \right); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) = & \exp \{ -i\omega_0 t - k_1 x + iS_{U1}(v_1, x, t) \} \cdot f_{k_1} \left(\frac{x}{v_1} - t \right) + \\ & + \exp \{ -i\omega_0 t + k_1 x + iS_{U1}(-v_1, x, t) \} \cdot f_{-k_1} \left(-\frac{x}{v_1} - t \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Psi_W(x, t) = & \exp \{ -i\omega_0 t + ik(x - b_1) + iS_{UW}(v, x, t) \} \cdot f_k \left(\frac{x - b_1}{v} - t \right) + \\ & + \exp \{ -i\omega_0 t - ik(x - b_1) + iS_{UW}(-v, x, t) \} \cdot f_{-k} \left(-\frac{x - b_1}{v} - t \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, t) = & \exp \{ -i\omega_0 t - k_2(x - a - b_1) + iS_{U2}(v_2, x, t) \} \cdot f_{k_2} \left(\frac{x - a - b_1}{v_2} - t \right) + \\ & + \exp \{ -i\omega_0 t + k_2(x - a - b_1) + iS_{U2}(-v_2, x, t) \} \cdot f_{-k_2} \left(-\frac{x - a - b_1}{v_2} - t \right); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi_c(x, t) = \exp \{ -i\omega_0 t + ik(x - d) \} \cdot F \left(\frac{x - d}{v} - t \right), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0 = \varepsilon/\hbar, \quad k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar, \quad k_n = \sqrt{2m_b(V_n - \varepsilon)}/\hbar, \\ v = \hbar k/m, \quad v_n = i\hbar k_n/m_b, \end{aligned} \quad (10)$$

ε – энергия электрона, $n = 1, 2$,

$$iS_{U1}(\pm v_1, x, t) = \mp \int_0^x dx' \frac{U(x')}{\hbar|v_1|} \cos \omega t, \quad (11)$$

$$S_{UW}(\pm v, x, t) = \mp \int_{b_1}^x dx' \frac{U(x')}{\hbar v} \cos \omega t, \quad (12)$$

$$iS_{U2}(\pm v_2, x, t) = \mp \int_{a+b_1}^x dx' \frac{U(x')}{\hbar|v_2|} \cos \omega t, \quad (13)$$

а $f_e \left(-\frac{x}{v} - t \right)$, $f_{\pm k_1} \left(\pm \frac{x}{v_1} - t \right)$, $f_{\pm k} \left(\pm \frac{x - b_1}{v} - t \right)$, $f_{\pm k_2} \left(\pm \frac{x - a - b_1}{v_2} - t \right)$, $F \left(\frac{x - d}{v} - t \right)$ – произвольные функции туннелирования от указанных в скобках аргументов, связь между

которыми определяется из граничных условий. В систему функций (5)–(9) введены, в отличие от [5], волновые функции электронов в барьерах: $\Psi_1(x, t)$, $\Psi_2(x, t)$.

Сшивая волновые функции (5)–(9) и потоки электронов на границах барьеров, начиная с правой границы правого (коллекторного) барьера и кончая левой границей левого (эмиттерного) барьера, получим уравнение для единой функции туннелирования $F(\pm a/v \pm b_1/v_1 \pm b_2/v_2)$, зависящей от восьми сдвинутых аргументов. При условии

$$\omega a/v \ll 1, \quad \omega b_n/|v_n| \ll 1, \quad (14)$$

которое в практически интересных случаях выполняется до частот $\omega \approx 10^{13} \text{ с}^{-1}$, и дополнительном условии

$$a/v \gg b_n/|v_n|, \quad S_{UW} \gg S_{Un}, \quad k_n b_n = \text{const} \quad (15)$$

уравнение для функции туннелирования зависит лишь от двух аргументов и принимает вид:

$$G \cdot F(z) + R e^{2ika} \cdot A(t) \cdot F(z + 2T) = Y(t), \quad z = -\frac{a}{v} - t, \quad T = \frac{a}{v}, \quad (16)$$

$$G = 4\text{ch}(k_1 b_1)\text{ch}(k_2 b_2) - \left(\frac{1}{\xi_1} - \xi_1\right) \left(\frac{1}{\xi_2} - \xi_2\right) \text{sh}(k_1 b_1)\text{sh}(k_2 b_2) + \\ + 2i \left(\frac{1}{\xi_1} - \xi_1\right) \text{sh}(k_1 b_1)\text{ch}(k_2 b_2) + 2i \left(\frac{1}{\xi_2} - \xi_2\right) \text{ch}(k_1 b_1)\text{sh}(k_2 b_2), \quad (17)$$

$$R = \left(\frac{1}{\xi_1} + \xi_1\right) \left(\frac{1}{\xi_2} + \xi_2\right) \text{sh}(k_1 b_1)\text{sh}(k_2 b_2), \quad (18)$$

$$A(t) = \exp(-2iS_W \cos \omega t), \quad Y(t) = 4q \exp(ika - iS_W \cos \omega t), \quad (19)$$

$$\xi_n = \left(\frac{m_b}{m} \frac{\varepsilon}{V_n - \varepsilon}\right)^{1/2}, \quad S_W = \frac{1}{2} \frac{U(a)}{\hbar \omega} \omega \frac{a}{v} \left(1 + 2\frac{b_1}{a}\right). \quad (20)$$

Подчеркнем, что условие $k_n b_n = \text{const}$ сохраняет неизменной вероятность туннелирования электронов через барьеры. Уравнение (16) отличается от подобного уравнения, рассмотренного в [5], более сложной зависимостью функций G , R от параметров структуры. Применяя способ решения уравнений типа (16), рассмотренный в [5–7], получим

$$F(z) = -q\Gamma_0 \cdot \Phi_0(z) e^{-ika} \cdot \int_0^\infty d\tau_1 \cdot \exp \left\{ -(\Gamma - i\delta)\tau_1 - i\frac{W}{\hbar\omega} \sin \omega(z + \tau_1) \right\},$$

$$|F(z)|^2 = q^2 \Gamma_0^2 \cdot \int_0^\infty d\tau_1 \exp[-(\Gamma - i\delta)\tau_1] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} d\tau_2 \exp[-(\Gamma + i\delta)\tau_2] \cdot \exp[iA \sin \omega z + iB \cos \omega z], \quad (21)$$

$$\Phi_0(z) = \exp\left(i \frac{W}{\hbar\omega} \sin \omega z\right), \quad W = \frac{1}{2}U(a) \left(1 + 2\frac{b_1}{a}\right), \quad (22)$$

$$A = \frac{W}{\hbar\omega} [\cos \omega\tau_2 - \cos \omega\tau_1], \quad B = \frac{W}{\hbar\omega} [\sin \omega\tau_2 - \sin \omega\tau_1], \quad (23)$$

$$\Gamma = \varepsilon_r \cdot \frac{\{|K_1||K_2| - |Z_1||Z_2|\}_{\varepsilon=\varepsilon_r}}{4R_{1r}R_{2r}\text{ch}k_{1r}b_1\text{ch}k_{2r}b_2} \times$$

$$\times \left\{ k_r a + \frac{1}{4} \sum_{n=1,2} R_{nr}^{-2} \left[\frac{V_n}{V_n - \varepsilon_r} \left(\frac{1}{\xi_{nr}} + \xi_{nr} \right) \text{th}k_{nr}b_n + \right. \right.$$

$$\left. \left. + k_{nr}b_n \frac{\varepsilon_r}{V_n - \varepsilon_r} \left(\frac{1}{\xi_{nr}} - \xi_{nr} \right) (1 - \text{th}^2k_{nr}b_n) \right] \right\}^{-1}, \quad (24)$$

$$\Gamma_0 = \frac{4\Gamma}{\{|K_1||K_2| - |Z_1||Z_2|\}_{\varepsilon=\varepsilon_r}}, \quad K_n = 2\text{ch}k_n b_n + i \left(\xi_n - \frac{1}{\xi_n} \right) \text{sh}k_n b_n, \quad (25)$$

$$Z_n = i \left(\xi_n + \frac{1}{\xi_n} \right) \text{sh}k_n b_n, \quad R_{nr} = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\xi_{nr}} - \xi_{nr} \right)^2 \text{th}^2k_{nr}b_n \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Энергия резонансных уровней ε_r определяется из уравнения

$$\text{tg}(2k_r a) = L_r/D_r, \quad L_r = 2 \left[\left(\frac{1}{\xi_1} - \xi_1 \right) \text{cth}k_2 b_2 + \left(\frac{1}{\xi_2} - \xi_2 \right) \text{cth}k_1 b_1 \right]_{\varepsilon=\varepsilon_r},$$

$$D_r = \left[4\text{cth}k_1 b_1 \text{cth}k_2 b_2 - \left(\frac{1}{\xi_1} - \xi_1 \right) \left(\frac{1}{\xi_2} - \xi_2 \right) \right]_{\varepsilon=\varepsilon_r}. \quad (27)$$

Уравнения (21), (22), (24), (26), (27) приводят к более сложной зависимости функции туннелирования $F(z)$, энергии ε_r и ширины Γ резонансных уровней от параметров структуры, чем в [5]. Величина Γ_0 , существенно влияющая на величину токов поляризации в РТД структурах с несимметричными барьерами, в ранее опубликованных теориях отсутствует.

2. *Вычисление токов в РТД.* Ток электронов I через волновую функцию Ψ определяется формулой

$$I = -i \frac{e\hbar}{2m(x)} \{\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\}. \quad (28)$$

Подставляя в (28) волновые функции (5)–(9), предварительно выразив входящие в них функции туннелирования через единую функцию туннелирования (21) (связь между

ними определяется в процессе сшивания волновых функций (5)–(9) и потоков электронов на границах барьеров; мы не приводим этих громоздких выражений), получим ток в квантовой яме – $I_W(x, t)$, в эмиттере – $I_e(t)$, в первом барьере – $I_1(t)$, во втором барьере – $I_2(t)$, в коллекторе – $I_c(t)$:

$$I_W(x, t) = ev \left\{ |F(z)|^2 + \frac{1}{4} \left(\xi_2 + \frac{1}{\xi_2} \right)^2 \cdot \text{sh}^2 k_2 b_2 \cdot [|F(z)|^2 - |F(\tilde{z})|^2] \right\}, \quad (29)$$

$$z = \frac{x - a - b_1}{v} - t, \quad \tilde{z} = -\frac{x - a - b_1}{v} - t,$$

$$I_e(t) = I_1(t) = I_W(b_1, t), \quad I_2(t) = I_c(t) = I_W(a + b_1, t). \quad (30)$$

Из (29), (30) следует, что задача сводится к вычислению тока в квантовой яме $I_W(x, t)$. Активную составляющую тока, пропорциональную $\cos \omega t$, вычислим с помощью фурье-преобразования:

$$I_{CW}(x) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \cos \omega t \cdot I_W(x, t). \quad (31)$$

Подставив (29) и (21) в (31), после достаточно сложных вычислений получим ток $I_{CW}(x)$ и приведенный ток I_{CW} :

$$I_{CW}(x) = \frac{4\Gamma_0^2}{\omega^2 + 4\Gamma^2} \left\{ 2\Gamma S_1 - \omega S_2 + \frac{a + b_1 - x}{a} \frac{\omega}{\Gamma_2} (\omega S_1 + 2\Gamma S_2) \right\}, \quad (32)$$

$$I_{CW} = \frac{1}{a} \int_0^a dx I_{CW}(x) = \frac{4\Gamma_0^2}{\omega^2 + 4\Gamma^2} \left\{ 2\Gamma S_1 - \omega S_2 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Gamma_2} (\omega S_1 + 2\Gamma S_2) \right\}, \quad (33)$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi/\omega}^{(n+1)\pi/\omega} dt e^{-\Gamma t} \cdot J_1 \left(\beta \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \delta t \cos \frac{\omega t}{2}, \quad (34)$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi/\omega}^{(n+1)\pi/\omega} dt e^{-\Gamma t} \cdot J_1 \left(\beta \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \delta t \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (35)$$

$$\beta = -\frac{eEa}{\hbar\omega} \left(1 + 2\frac{b_1}{a} \right), \quad \frac{1}{\Gamma_2} = \frac{1}{2} \frac{a}{v} \left(\xi_2 + \frac{1}{\xi_2} \right)^2 \text{sh}^2 k_2 b_2. \quad (36)$$

Изложенным выше способом находим также реактивную составляющую тока $I_{SW}(x)$ и постоянную составляющую тока $I_0(\beta)$ в сильном переменном электрическом поле:

$$I_{SW}(x) = \frac{4\Gamma_0^2}{\omega^2 + 4\Gamma^2} \left\{ \omega S_1 + 2\Gamma S_2 - \frac{a + b_1 - x}{a} \frac{\omega}{\Gamma_2} (2\Gamma S_1 - \omega S_2) \right\}, \quad (37)$$

$$I_0 = \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi/\omega}^{(n+1)\pi/\omega} dt e^{-\Gamma t} \cdot J_0\left(\beta \sin \frac{\omega t}{2}\right) \cos \delta t, \quad (38)$$

где $J_0\left(\beta \sin \frac{\omega t}{2}\right)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Формулы (32)–(38) позволяют получить выражения для токов в ряде интересных для практических приложений случаев. Мы рассмотрим наиболее важный из них.

3. *Резонансное туннелирование в сильном переменном электрическом поле.* При $\omega = \delta \gg \Gamma$ (квантовый режим); $\xi_{nr} \ll 1$, $k_{nr}b_n \gg 1$ (предельно сильные барьеры) из (24)–(26), (34)–(36) получим (см. (10), (20) и [8]):

$$\Gamma = \frac{8\varepsilon_r}{k_r a} \left\{ \xi_{1r}^2 \exp(-2k_{1r}b_1) + \xi_{2r}^2 \exp(-2k_{2r}b_2) \right\}, \quad (39)$$

$$\Gamma/\Gamma_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi_{1r}}{\xi_{2r}} \exp(k_{2r}b_2 - k_{1r}b_1) + \frac{\xi_{2r}}{\xi_{1r}} \exp(k_{1r}b_1 - k_{2r}b_2) \right\}, \quad (40)$$

$$\Gamma/\Gamma_2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\xi_{1r}}{\xi_{2r}} \right)^2 \exp[2(k_{2r}b_2 - k_{1r}b_1)] \right\}, \quad (41)$$

$$S_1 = \frac{2}{\beta\Gamma} \cdot J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad S_2 = \frac{4}{\pi\beta\Gamma} J_2(\beta). \quad (42)$$

Подставив (42) в (33), находим приведенный ток в квантовой яме

$$I_{CW} = \frac{\Gamma_0^2/\Gamma^2}{\omega^2 + 4\Gamma^2} \left(4\Gamma^2 + \omega^2 \frac{\Gamma}{\Gamma_2} \right) \cdot \frac{4}{\beta} J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (43)$$

При симметричных барьерах ($k_{1r}b_1 = k_{2r}b_2$, $\Gamma_0 = \Gamma_2 = \Gamma$)

$$I_{CW} = \frac{4}{\beta} J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (44)$$

Формула (44) совпадает с формулой (113) в [5], полученной в модели РТД с δ -функциональными барьерами.

При $k_{2r}b_2 \gg k_{1r}b_1$ [коллекторный барьер сильнее эмиттерного; см. (39)–(41)]

$$I_{CW} = \frac{8}{\beta} J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (45)$$

При $k_{1r}b_1 \gg k_{2r}b_2$ (эмиттерный барьер сильнее коллекторного)

$$I_{CW} = \frac{8}{\beta} J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot Z_{12}; \quad Z_{12} = \frac{V_2 - \varepsilon_r}{V_1 - \varepsilon_r} \exp[-2(k_{1r}b_1 - k_{2r}b_2)]. \quad (46)$$

Из (44)–(46) следует, что приведенный ток I_{CW} в случае более сильного коллекторного барьера на один-два порядка (как показывают оценки) больше приведенного тока в случае более сильного эмиттерного барьера и в два раза превышает приведенный ток в случае симметричных барьеров. Во всех трех случаях ток уменьшается при $\beta \rightarrow 0$, а с ростом β пробегает ряд максимумов с убывающей высотой. Максимумы разделяются минимумами, в которых ток обращается в нуль. При амплитуде переменного поля $E_m = 2.72\hbar\omega/ea$ ($\beta_m = 2.72$) приведенный ток принимает максимальное значение (первый максимум)

$$I_{CW}(\beta_m) = \frac{8}{\beta_m} J_1^2(\beta_m/2) = -0.84, \quad (47)$$

почти равное (по абсолютной величине) постоянному резонансному току в случае симметричных барьеров, т.е. (см. (38))

$$I_0(\beta = 0, \delta = 0, \Gamma_0 = \Gamma) = 1. \quad (48)$$

Заключение. Найдены волновые функции и функция туннелирования для электронов в резонансно-туннельном диоде с несимметричными барьерами конечной высоты и ширины в сильном электромагнитном поле путем решения уравнения Шредингера с граничными условиями, выражающими равенство волновых функций и потоков электронов на границах барьеров.

Показано, что в квантовом режиме ($\delta = \hbar\omega \gg \Gamma$) выражение для активного тока поляризации в случае РТД с симметричными барьерами конечных размеров совпадает с выражением, полученным в модели РТД с симметричными δ -функциональными барьерами.

Вычислены токи поляризации, энергия и ширина резонансных уровней. Показано, что зависимости токов поляризации, энергии и ширины резонансных уровней от параметров структуры в случае РТД с несимметричными барьерами конечной высоты и ширины отличаются от зависимостей, которые следуют из теории РТД с δ -функциональными барьерами.

Показано, что в квантовом режиме в случае РТД с несимметричными барьерами конечных размеров, когда вероятность туннелирования электронов через коллекторный барьер много меньше вероятности туннелирования электронов через эмиттерный барьер, отрицательный активный переменный ток при $E \approx 2.8\hbar\omega/ea$ достигает максимального значения, равного (по абсолютной величине) 84% от постоянного резонансного тока, I_0 ($\Gamma_0 = \Gamma$, $E = \delta = 0$) = 1. В этих условиях возникает возможность усиления и

генерации электромагнитных волн. Мощность генерации на частотах $\omega = 10^{12} - 10^{13} \text{ с}^{-1}$ может достигать $10^5 - 10^6 \text{ Вт/см}^2$.

При симметричных барьерах активный переменный ток достигает значения, равного 40% от постоянного резонансного тока.

Если вероятность туннелирования электронов через эмиттерный барьер много меньше вероятности туннелирования электронов через коллекторный барьер, то активный переменный ток становится на один-два порядка меньше постоянного резонансного тока; в такой же степени уменьшается и мощность генерации излучения.

При низких частотах ($\omega \ll \Gamma$) токи поляризации в РТД и мощность генерации излучения не зависят от соотношения вероятностей туннелирования электронов через эмиттерный и коллекторный барьеры.

Автор благодарен В.С. Виноградову, А.А. Горбацевичу, И.И. Иванчику, Ю.В. Копаеву, В.В. Капаеву, В.Н. Мурзину за обсуждение работы и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК № 16.513.11.3079), РФФИ (№ 11- 02-01182), Программы Президиума РАН “Основы фундаментальных исследований нанотехнологий и наноматериалов”, Программ фундаментальных исследований ОФН РАН “Современные проблемы радиофизики” (IV.12) и “Физические и технологические исследования полупроводниковых лазеров, направленные на достижение предельных параметров” (III.7).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] И. В. Беляева, Е. И. Голант, А. Б. Пашковский, ФТП **31**, № 2, 137 (1997).
- [2] Е. И. Голант, А. Б. Пашковский, ТМФ **120**, № 2, 332 (1999).
- [3] В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **116**, 704 (1999).
- [4] В. А. Чуенков, Краткие сообщения по физике ФИАН, **37**(10), 21 (2008).
- [5] В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **124**, № 2(8), 379 (2003).
- [6] Д. Г. Соколовский, М. Ю. Сумецкий, ТМФ **64**, № 2, 233 (1985).
- [7] D. Sokolovski, Phys. Rev. B **37**, № 8, 4201 (1988).
- [8] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, Москва, 1971), стр. 697, 702, 982.

Поступила в редакцию 1 ноября 2012 г.