УДК 530.12:531.51

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТЕТРАДНЫЕ ТОКИ В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА–КАРТАНА. I. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Р. Ф. Полищук

Получены нелокальные интегральные законы сохранения в теории Эйнштейна–Картана для тензора энергии-импульса источников общего вида, по сути являющиеся интегральным эквивалентом свёрнутых тождеств Бьянки.

Ключевые слова: гравитационная энергия, нелокальные законы сохранения, тетрадные токи, теория Эйнштейна–Картана.

Введение. Наука есть развивающееся понятие. При этом каждое понятие имеет предел применимости, так что мир и истина о мире есть процесс. Общая теория относительности требует квантового обобщения и уточнения даже классических понятий. Что такое гравитация, гравитационная энергия, гравитационный вакуум? Какие законы сохранения имеют место в общей теории относительности? Где границы применимости понятий геометрии пространственно-временного континуума, материальной точки, массы?

Как известно [1], *объект, являющийся центральным во всей классической общей теории относительности, – четырёхмерная геометрия пространства-времени – просто не существует, если выйти за рамки классического приближения.* Имеется в виду следующее. Если мы при сколь угодно точной аппроксимации с помощью тетраэдров поверхности Коши (*геометродинамическая координата* этой скелетной 3-геометрии мгновенного состояния пространства Вселенной задаётся точкой бесконечномерного пространства, число измерений которого равно числу рёбер набора всех тетраэдров) зададим точно её 3-метрику, то в силу квантового принципа неопределённостей мы не сможем задать ростков во времени этой 3-геометрии (задать геометродинамический импульс). А невозможность определить временную эволюцию начальной 3-геометрии

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: rpol@asc.rssi.ru.

означает просто отсутствие здесь самого времени: в физике все физически значимые величины определяются операционально, через принципиальную экспериментальную измеримость хотя бы в мысленных экспериментах.

Общая теория относительности унаследовала от ньютоновой гравитации понятие точно локализуемой *материальной точки*. Но, как известно [2], *понятие координат фотона вообще не имеет физического смысла*. Физика оперирует понятием физического бесконечно малого объёма, а теория струн сделала размерность физического пространства динамическим параметром теории, связанным с числом степеней свободы частицы-струны, и приписала внутреннему компактифицированному её пространству размерность 7. Поэтому возможно, что параллельный обход по контуру вектора в 4-мерном макроскопическом пространстве-времени вызывает не только его поворот (за что отвечает риманова кривизна), но и размыкание самого контура (за что должно отвечать кручение связности, торсионное поле Картана [3]): ведь 4-мир событий тогда закрученный и “зернистый”, и движение в нём подобно движению по винтовым лестницам – тем более, что принцип неопределённостей при точном возвращении в прежнюю точку пространства диктует неопределённое смещение во времени, поскольку абсолютно точное задание и измерение координат времени и пространства невозможно. Имеет также смысл обратить внимание на аналогию между кручением искривлённого и закрученного пространства-времени и моделью распределённой плотности дислокаций в сплошной среде, на что впервые указал К. Кондо [4, 5].

Всякая теория в соответствии с духом Эрлангенской программы Клейна имеет дело с инвариантами соответствующей теории. Инвариантами общей теории относительности являются *геометрические объекты*, то есть наборы определяющих чисел для каждой мировой точки в локальной системе координат (в локальной *карте*), позволяющие с помощью функций перехода к другой локальной карте (принадлежащей покрывающему всё многообразие событий *атласу*) определить полный набор этих величин в новой карте. Например, отдельная компонента вектора или формы связности – не геометрический объект, а полный набор компонент – объект. При этом вектор (и любая тензорная плотность) есть также *однородно* преобразующийся объект, то есть *геометрическая величина*, в отличие от формы связности (нули, т.е. ядро которой есть поле горизонтальных площадок главного расслоения мира событий, точками которого являются векторные реперы). Суть инвариантов общей теории относительности (мировых точек и их подмножеств, тензоров Римана и так далее) – их независимость от выбора координат. Поэтому сами координаты не могут быть инвариантами, но ими являются дополнительные структуры, получаемые *выключением координатного индекса*, превращающим систему локальных координат (в том числе не только в виде четвёрки функций, но и в виде четвёрки независимых координатных векторных полей, образующих репер в каждой касательной миру плоскости для каждой мировой точки) в *систему отсчёта* как дополнительную инвариантную структуру (скажем, в гладкое ортонормированное *тетрадное поле*, существующее на параллелизуемом многообразии событий), метрику – в четвёрку ковекторов (1-форм) или в десятку скалярных полей. Различение систем координат и систем отсчёта важно, поскольку физический смысл имеет именно изменение системы отсчёта, а не координат. Рассмотрим, например, декартовы координаты в мире Минковского и перейдём к полярным координатам Риндлера в 2-плоскости, включающей ось времени. Тогда геодезически полный мир Минковского разделится на четыре клина Риндлера (соответственно, клины правый, левый, будущего и прошлого) с метриками

$$ds^2 = \exp(\pm 2ax)(-dt^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2,$$

$$ds^2 = \exp(\pm 2at)(-dt^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2. \tag{1}$$

Чтобы реализовать соответствующие системы отсчёта, нужно, скажем, в правом и левом клинах ускорить континуумы наблюдателей. Это изменит их вакуумы и создаст поле с отрицательной плотностью гравитационной энергии, равной $-a^2 \exp(\mp 2ax)/8\pi G$ (где в знаменателе – постоянная тяготения Ньютона): ведь согласно принципу Эйнштейна локальной эквивалентности гравитации и инерции можно считать, что инерции нет, но есть нетривиальное гравитационное поле (такие поля ненулевой локально плоской связности называют *чисто калибровочными*), вакуум которого связан формулами Боголюбова с вакуумом поля неускоренных наблюдателей. А физической причиной появления клинов прошлого и будущего, как это видно из точного решения для пакета сильных плоских гравитационных волн [6], стало притяжение в бесконечном прошлом неподвижных ранее пробных тел пробежавшей между ними положительной гравитационной массой-энергией. Её количество пропорционально расстоянию между пробными телами, испытавшими, на языке геометрии, геодезическое отклонение внутри пакета, отвечающее излому геодезических при предельном до нуля сближении переднего и заднего волновых фронтов. При этом граничные горизонты клинов Риндлера, не покрываемые координатами Риндлера, могут быть носителями бесконечно тонких волновых фронтов с бесконечной полной энергией (как и горизонты миров Шварцшильда и де Ситтера в жёстких системах отсчёта).

Тот факт, что в плоском мире Риндлера гравитационное поле не равно нулю, является аргументом в пользу того, что оно – форма связности, а не риманова кривизна как её градиент связности, что гравитационное поле лучше определять без вторых производных метрики или тетрады, то есть зависящим от калибровки тетрады.

Риман-плоских (пример: мир Риндлера) и риччи-плоских (пример: мир Шварцшильда – центральная сингулярность с бесконечными приливными силами из многообразия удаляется вопреки её физическому значению сингулярного источника) вакуумов бесконечно много, но ни гравитационное действие в виде скалярной кривизны, ни метрика, инвариантные относительно действия группы Лоренца (и Пуанкаре) этого не отражают. Ситуацию существования нетривиальных гравитационных полей с их тривиальным действием можно исправить переходом от уровня метрики к уровню задающих калибровку вакуума систем отсчёта. Без такого перехода, скажем, от метрики к гамма-матрицам Дирака (по сути эквивалентным переходу от метрики к “квадратным корням” из метрики, то есть к тетрадному формализму, от операторов Клейна–Гордона–Фока – к операторам Дирака) невозможно ввести и спиновую связность. Без тетрадного формализма невозможно решить и проблему гравитационной энергии, зависящей от задаваемого тетрадным полем вакуума как фона для надвакуумных полей материи. Следует учитывать, что, согласно идее Киржница и Линде [7], сохраняется сумма энергий вакуума и вещества, что сами элементарные частицы-струны понимаются как кванты возбуждения физического вакуума, что, наконец, деление физической реальности на вакуум и материю относительно, и сам вакуум не инвариантен относительно общего действия группы Лоренца. Почему бы тогда не ограничить определение гравитационного действия требованием его инвариантности относительно только подгруппы Лоренца? Мы живём в квантовом мире, а квантование, скажем, электродинамики требует ограничиваться физически значимым поперечным импульсом (лоренцевой калибровкой векторпотенциала). Аналогичное требование лоренцевой калибровки тетрады как гравитационного потенциала можно ввести и в гравитацию. Кроме того, именно полутетрадный подход к гравитации (исключается и заменяется на лоренцев индекс только один координатный индекс уравнений Эйнштейна) позволяет решить проблему гравитационной энергии и законов сохранения.

2. Гравитационное действие и гравитационное поле как связность. Гравитационное поле, как и всякое калибровочное поле, есть связность, а не метрика и не риманова кривизна мира событий. Но в общей теории относительности гравитационное поле отождествляют с метрикой и берут лоренц-инвариантное действие

$$I = (16\pi G)^{-1}\int *R + \int *I_m$$

$$*1 = \sqrt{-g}d^4x = \sqrt{-g}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (2)$$

Здесь звезда есть оператор Ходжа, переводящий p-форму на n-многообразии в (n-p)-форму. Заодно напомним известное разложение Ходжа p-формы ω на точную, замкнутую и гармоническую:

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

$$\delta = *^{-1}d*,\ \delta\beta = -\nabla^2\beta_{\lambda\mu\ldots\nu}, \quad (3)$$
$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d,\ \Delta\gamma = 0.$$

Градиентное преобразование электромагнитного вектор-потенциала не влияет на электромагнитный тензор, а лоренцева калибровка потенциала означает исключение его градиентной компоненты как нефизичной. Гармоническая компонента отвечает свободному полю излучения (в том числе статическому полю как стоячей волне). В случае гравитации потенциалом является тетрада, и дифференциалы четырёх декартовых координат (нуль-форм, функций, отождествляемых с длинами вдоль осей координат) определяют метрику Минковского (с нулевым полем), не совместимую с принципом неопределённостей (импульс поля здесь тоже равен нулю). Динамику гравитационного поля определяет козамкнутая часть тетрады, козамкнутая тетрада.

Тензор энергии-импульса определяется вариацией материальной части действия как по метрике, так и по тетраде:

$$\delta I_m = \frac{1}{2}\int *T^{\mu\nu}(x)\delta g_{\mu\nu} = \int *T^{a\mu}\delta e_{a\mu}. \quad (4)$$

Скалярная кривизна имеет вид:

$$R = -(\nabla_\mu e_{a\nu})(\nabla^\nu e^{a\mu}) + K_a K^a + 2\nabla^\mu K_\mu,$$

$$K_\mu = e^a_\mu K_a = -e^a_\mu \nabla^\nu e_{a\nu}. \quad (5)$$

В лоренцевой калибровке тетрады, нормирующей четвёрку ортогональных её векторам 3-объёмов, её вторые производные в скаляре Риччи исчезают [8]. И это важно для правильного определения гравитационного действия. В сентябре 1976 года в ГАИШ МГУ выступал Гиббонс, при нас сказавший, что *ему и Хокингу надоело возиться со вторыми производными, и они ввели поверхностный член.* В своей статье [9] Хокинг обосновал это тем, что иначе амплитуда перехода от начального состояния поля к конечному не аддитивна при проведении промежуточной гиперповерхности, отвечающей промежуточному моменту времени: на ней возникают изломы второй фундаментальной формы и дельта-функция риччиевой кривизны. Но Гиббонс и Хокинг нормально определили гравитационное действие только для островной системы, признавая появление некоего *неприятного члена* [9]. Эти ухищрения излишни при введении лоренцевой калибровки тетрады, дающей компенсацию вторых производных скаляра Риччи поверхностным членом для произвольного гравитационного поля в произвольном 4-объёме [8]. Лоренцева калибровка тетрады оставляет из шести две степени свободы лоренцевых вращений тетрады, которые переводят тетрадное 1+1+1+1 расщепление пространства времени в диадное 2+2 расщепление [10], отвечающее струнному подходу.

3. Нелокальные интегральные законы сохранения в гравитации Эйнштейна. Бытует ошибочное мнение, что в общей теории относительности нет привилегированных систем отсчёта. Но в ситуации алгебраически общего положения тензор энергии-импульса материи имеет единственную риччи-каноническую тетраду собственных векторов, где временной вектор сопутствует прогибающей пространство-время среде (вдоль геодезических движутся только пробные тела). Имеется также вейль-каноническая тетрада, сопутствующая отрывающейся от источников свободной части гравитационного поля, так что пары векторов определяют 2-направления экстремальной конформной кривизны. Четвёрки независимых собственных значений конформной и риччиевой кривизн и 6 разделяющих тетрады углов образуют все 14 инвариантов римановой кривизны, а тождества Бьянки дают их дифференциальную связь. Свёрнутые тождества Бьянки дают ковариантный дифференциальный закон сохранения, тривиальный в риччи-плоских мирах с нетривиальной конформной кривизной. Найдём интегральный эквивалент дифференциального закона сохранения тензора материи общего вида (ниже $p_0 = -p^0 > 0$, $-p_i = -p^i$, $i = 1, 2, 3$, суть давления) [11].

$$\begin{gathered}
T_{\mu\nu} = -g^{ab} p_a e_{a\mu} e_{b\nu} = -p^a e_{a\mu} e_{a\nu},\ g_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1,), \\
0 = e^\mu_a \nabla^\nu T_{\mu\nu} = \nabla^\nu T_{a\nu} - T_{\mu\nu} \nabla^\nu e^\mu_a,\ \nabla^\nu e^\mu_a = g_{aa} e^\nu_a a^\mu_a - K^{\nu\mu}_a - A^{\nu\mu}_a, \\
a^\mu_a = e^\mu_a \nabla_\nu e^\mu_a,\ K_{a\mu\nu} = -\frac{1}{2} L_{e_a} h_{(a)\mu\nu},\ h_{(a)\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{aa} e_{a\mu} e_{a\nu}, \qquad (6) \\
*e_a = \sqrt{-g_{aa} h_a} d^3 x,\ \nabla^\mu e_{a\mu} = \partial_a \ln \sqrt{-g_{aa} h_a},\ K_{aab} = 0, A_{aab} = 0.
\end{gathered}$$

Здесь h_a определитель 3-метрик площадок $\ker e_a$, введены векторы кривизны векторных линий, вторая фундаментальная форма указанных площадок и тензор их вращения с угловой скоростью $*(e_a \wedge de_a)$.

Лемма. Пусть в 4-области пространства-времени имеем семейство (трубку) интегральных векторных e_a-линий вдоль векторов $\partial_a = e^\mu_a \partial_\mu$ (латинский индекс лоренцев, греческий – координатный) с длиной дуги s_a и имеем эквидистантные сечения $s_a = \mathrm{const}$ трубки $\Sigma_a(s_a)$. Тогда для функции $f(x)$ со значениями на векторных линиях имеем равенства с одномерной интегральной компонентой вдоль векторных линий с переменным верхним пределом:

$$\partial_a f(x) = \partial_a \ln \exp\left(\int\limits_0^{s_a} f(x)ds\right),$$

$$\partial_a f(x) = 0 \Longrightarrow \int_{\Sigma_a(s_a)} \exp\left(\int\limits_0^{s_a} f(x)ds\right) = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Теорема. Дифференциальный закон сохранения для тензора энергии-импульса алгебраически общего типа $T_{\mu\nu}$, $T_{a\mu} = -p_a e_{a\mu}$ эквивалентен следующему нелокальному интегральному закону сохранения:

$$\int_{\Sigma_a(s_a)} *e_a p_a \exp\left(\int\limits_0^{s_a} p_a^{-1} p^b K_{abb} ds\right) = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Действительно, легко проверяются следующие равенства:

$$p_a^{-1}\nabla^\mu T_{a\mu} = -\partial_a \ln\left(p_a\sqrt{-g_{aa}h_a}\right),$$

$$-p_a^{-1}T_{\mu\nu}\nabla^\nu e^\mu_a = -p_a^{-1}p^b K_{abb} = -\partial_a \ln \exp \int\limits_0^{s_a} p_a^{-1}p^b K_{abb}ds. \tag{9}$$

В результате получаем

$$e^\mu_a \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_a\left(p_a\sqrt{-g_{aa}h_a}\exp\int\limits_0^{s_a} p_a^{-1}p^b K_{abb}ds\right) = 0,$$

$$\int_{\Sigma_a(s_a)} *e_a p_0 \exp\left(\int\limits_0^{s_a} p_a^{-1} p^b K_{abb} ds\right) = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Здесь интегрирование берётся по эквидистантным 3-мерным сечениям трубок векторных линий с длиной дуги s_a. Под знаком интеграла, скажем, по пространству ($a = 0$) стоит одномерная интегральная экспонента вдоль линий времени, учитывающая работу давлений и изменяющая массу-энергию 3-объёмов среды со временем (сравним это с известной формулой $dE = TdS - pdV$ для изотропной среды при её адиабатической деформации).

Для тензора энергии-импульса чистого когерентного излучения

$$T_{\mu\nu} = p_0 l_\mu l_\nu,\ l_\mu = e_{0\mu} + e_{1\mu},\ l_\mu l^\mu = 0,\ e_0^\mu e_0^\nu T_{\mu\nu} = p_0 \tag{11}$$

нелокальный интегральный закон сохранения тоже выполняется, как и для фотонного газа, в виде суперпозиции 4-импульсов всех его фотонов в каждом малом 3-объёме в приближении геометрической оптики.

Для плоских миров можно получить аналогичную более сложную формулу и для несвёрнутых тождеств Бьянки [11]. Важно то, что наличие интеграла под интегралом означает наличие *нелокального интегрального закона сохранения* в гравитации. Укажем здесь на важную гипотезу А.М. Виноградова [12]: *регулярная система уравнений в частных производных имеет полный набор нелокальных интегральных законов сохранения.* Известно, что полного набора локальных интегральных законов сохранения (подобных сохранению полного заряда) указанная система не имеет. Поскольку любое сильное поле прогибает пространство-время, обобщение интегральных законов сохранения в общем случае физических систем неизбежно. Гравитация связана с эталонами длин и длительности, и поверхностный член действия учитывает изменение 3-объёмов при эволюции, а введение его в действие в виде дивергенции делает гравитационное действие зависящим от лоренцевых вращений тетрады.

4. Нелокальные интегральные законы сохранения в гравитации Эйнштейна–Картана. Метрика нашей Метагалактики близка метрике комплексной 4-сферы де Ситтера. Её изометриями (сохраняющими метрику автоморфизмами пространства-времени) являются только вращения группы де Ситтера $SO(1{,}4)$, не совместимые с постоянными трансляциями группы Пуанкаре. Именно эти трансляции отвечают за законы сохранения 4-импульса (полной энергии и полного 3-импульса) замкнутой физической системы. Физический смысл имеют только собственные значения операторов Казимира группы де Ситтера, перемешивающие 4-импульс с угловым моментом и спином источников [13]. Это значит, что в общем случае физический смысл имеет комбинация массы и спина, которую мы назвали *спин-массой* [14]. Общая теория относительности как теория гравитации Эйнштейна связала массу с римановой кривизной пространства-времени: материя указывает геометрии, как ей искривляться, а геометрия указывает материи, как ей двигаться (по риччи-каноническим линиям времени, совпадающими с геодезическими при отсутствии давлений). Спин-массу естественно связать с гравитацией Эйнштейна–Картана. Гравитация Эйнштейна учитывает взаимодействие вращения источников с римановой кривизной с помощью уравнений Папапетру и решений типа Керра, но не учитывает спин-спинового взаимодействия. Кроме того, вращающееся пробное тело движется не по геодезической, что нарушает принцип эквивалентности Эйнштейна. Если связать спин источников с торсионным полем Картана [3] (с кручением связности), то мысленное сжатие в точку (квантовая механика этого не допускает уже ограничением размера тела планковской длиной и плотности тела планковской плотностью) вращающегося физически бесконечно малого тела влечёт обращение спина источника в нуль. Это означает, что однополюсное приближение для дираковской частицы не является решением уравнений поля для пространства-времени с кручением, то есть дираковская частица не должна быть точечной: возникает *радиус Картана*, на котором отталкивательный потенциал спина уравновешивает притягивающий потенциал массы [13]. Поэтому естественно обобщить гравитацию Эйнштейна до гравитации Эйнштейна–Картана [15, 16] и соответственно обобщить законы сохранения. Для начала рассмотрим лагранжиан спинорной материи (постоянные Планка и скорость света считаем равными единице) и поясним входящие в него величины:

$$L_\psi = \frac{i\sqrt{-g}}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi_{,\mu} - \bar\psi_{,\mu}\gamma^\mu\psi - \bar\psi\{\gamma^\mu,\Gamma_\mu\}\psi) - m\sqrt{-g}\bar\psi\psi,$$

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\omega_{ab\mu}\gamma^a\gamma^b,$$

$$S^{\mu\nu\lambda} = \frac{i\sqrt{-g}}{2}\bar\psi\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]}\psi,$$

$$T_{a\mu} = \delta L_\psi/\delta e^{a\mu},$$

$$S^\mu_{ab} = 2\delta L_\psi/\delta\omega^{ab}_\mu,$$

$$\omega^{ab}_\mu = \frac{1}{2}e^{a\nu}(\partial_\mu e^b_\nu - \partial_\nu e^b_\mu) - \frac{1}{2}e^{b\nu}(\partial_\mu e^a_\nu - \partial^a_\nu) - \frac{1}{2}e^{a\rho}e^{b\sigma}(\partial_\rho e_{c\sigma} - \partial_\sigma e_{c\rho})e^c_\mu,$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}Q^\lambda_{\mu\nu},$$

$$Q^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 8\pi G\left(S^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^\lambda_\mu S^\rho_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\delta^\lambda_\nu S^\rho_{\rho\mu}\right),$$

$$8\pi G S^\lambda_{\mu\nu} = Q^\lambda_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu Q^\rho_{\nu\rho} - \delta^\lambda_\nu Q^\rho_{\mu\rho},$$

$$\partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^a_\lambda + \omega^{ab}_\mu e^b_\nu = 0. \tag{12}$$

Уравнения поля числом 16 и следствие тождеств Бьянки имеют обычный вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{13}$$

Укажем антисимметричную часть тензора энергии-импульса и разложим его на симметричную и антисимметричную части:

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \nabla_\lambda S^{\mu\nu\lambda},$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}. \tag{14}$$

Нелокальный интегральный закон сохранения для симметричной компоненты данного тензора нами получен. Дополним его учётом торсионного поля Картана. Имеем:

$$2\nabla_\nu T^{[\mu\nu]} = \nabla_{[\nu}\nabla_{\lambda]} S^{\mu\nu\lambda} = R^\nu_{\rho\nu\lambda} S^{\mu\rho\lambda} + R^\lambda_{\rho\nu\lambda} S^{\mu\nu\rho} = R_{\rho\lambda} S^{\mu\rho\lambda} R_{\rho\nu} S^{\mu\nu\rho} = 8\pi G S^{\mu\nu\lambda} T_{[\nu\lambda]}. \tag{15}$$

Мы здесь учли, что

$$R^\mu_{\rho\nu\lambda} S^{\rho\nu\lambda} = \frac{1}{3}(R^\mu_{\rho\nu\lambda} + R^\mu_{\nu\lambda\rho} + R^\mu_{\lambda\rho\nu}) S^{\rho\nu\lambda} = 0,$$

$$R_{[\nu\lambda]} = 8\pi G T_{[\nu\lambda]} = 4\pi G \nabla^\rho S_{\nu\lambda\rho}. \tag{16}$$

Таким образом, получаем:

$$0 = e_{a\mu} \nabla_\nu T^{\mu\nu} = e_{a\mu} \nabla_\mu T^{(\mu\nu)} + 4\pi G S^{\mu\nu}_a \nabla^\rho S_{\mu\nu\rho},$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \partial_a [p_a \sqrt{-g_{aa} h_a} \exp \int\limits_0^{s_a} (p_a^{-1} p^b K_{abb} + (4\pi G p_a^{-1}) \sqrt{-g_{aa} h_a} S^{\mu\nu}_a (\nabla^\lambda S_{\mu\nu\lambda} + S^\rho_{\lambda\rho} S^\lambda_{\mu\nu}) ds] = 0. \tag{17}$$

Таким образом, нелокальный интегральный закон сохранения источников в гравитации Эйнштейна–Картана имеет в общем случае следующий вид:

$$\int_{\Sigma_a(s_a)} * e_a p_a \exp \int\limits_0^{s_a} (p_a^{-1} p^b K_{abb} + (4\pi G p_a^{-1}) \sqrt{-g_{aa} h_a} S^{\mu\nu}_a (\nabla^\lambda S_{\mu\nu\lambda} + S^\rho_{\lambda\rho} S^\lambda_{\mu\nu}) ds = \text{const}. \tag{18}$$

Появление постоянной тяготения Ньютона, равной в естественных единицах квадрату планковской длины, говорит о том, что торсионное поле Картана существенно только в теории очень Ранней Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация. В 3-х т. Т. 3* (М., Мир, 1977), с. 447.

[2] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лившиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория. Ч. 1* (М., Наука, 1968), с. 25.

[3] E. Cartan, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **174**, 593 (1922).

[4] K. Kondo, *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry. Vol. 1* (Tokio, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, 1955).

[5] Я. А. Схоутен, *Тензорный анализ для физиков* (М., Наука, 1965), с. 385.

[6] H. Bondi, F. A. E. Pirani, and J. Robinson, Proc. Roy. Soc. London, A **251**, 519 (1959).

[7] Д. А. Киржниц, А. Д. Линде, ЖЭТФ **67** (4(10)), 1263 (1974).

[8] Р. Ф. Полищук, Краткие сообщения по физике ФИАН **35**(9), 14 (2008).

[9] S. W. Hawking, *General Relativity* (Cambridge University Press, 1979).

[10] Р. Ф. Полищук, ДАН СССР **209**, 76 (1973).

[11] Р. Ф. Полищук, *Фундаментальные физические взаимодействия и законы сохранения*, **1** (М., Научный альманах “Гордон”, 2003), с. 67.

[12] *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика (М., 1997).

[13] Ф. Гюрши, Введение в теорию групп, *Теория групп и элементарные частицы* (М., Мир, 1967), с. 25.

[14] Р. Ф. Полищук, Краткие сообщения по физике ФИАН **38**(3), 3 (2011).

[15] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[16] D. W. Sciama, On the analogy between charge and spin in general relativity, in: *Recent Developments in General Relativity* (Oxford, Pergamon Press, 1962).

Поступила в редакцию 6 ноября 2012 г.