

УДК 535.8, 681.3.02, 518.6

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ КАРТ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

А. Ю. Быковский

Аппарат многозначной алгебры Аллена–Живона предлагается использовать для описания цифровых карт местности в системах позиционирования.

Ключевые слова: цифровая карта местности, многозначно-логическая функция, алгебра Аллена–Живона.

Введение. Возникновение концепции сетцентрических (СТЦ) войн создало мощный импульс для развития целого ряда новых гражданских технологий [1], в том числе, разработки СТЦ концепций глобальных сетевых вычислений, электронного правительства, управления финансами, управления беспилотными транспортными средствами. СТЦ системы управления беспилотными средствами предполагают интенсивный обмен данными, изображениями и цифровыми картами, открывая широкие перспективы для различных оптоэлектронных разработок. При этом требуется обеспечить единое адресное пространство всех устройств памяти в сети и целостную структуру описания знаний, используя информационно-емкие модели.

Ранее, например, в [2, 3] было показано, что модели дискретной k -значной логики, основанные на алгебре Аллена–Живона (ААЖ) [4], обладают исключительно высокой информационной емкостью, что делает ААЖ привлекательным кандидатом на роль средства моделирования в СТЦ системах. Во-первых, модели ААЖ могут быть использованы в криптографии для генерации очень больших массивов ($\sim 10^{500}$) случайных одноразовых криптографических ключей [2, 3]. Во-вторых, многозначно-логическая функция (МЗЛФ) может быть использована для моделирования сложных структур знаний в многоагентных системах искусственного интеллекта [5], где число описываемых информационных состояний также может быть большим.

Цель работы – показать, что аппарат ААЖ весьма выгоден для компактного описания цифровых карт с большой информационной емкостью.

Математическая модель ААЖ. В рамках аппарата ААЖ [4], в отличие от булевой логики с двумя логическими значениями 0 и 1, рассматривают k -значные логические

функции $y = F(x_1, \dots, x_n)$, для которых $x_1, \dots, x_n, y \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Т.е. входные переменные x_1, \dots, x_n и выходная переменная y принимают только дискретные значения истинности $0, 1, 2, \dots, k-1$, где 0 – абсолютно ложное значение, $k-1$ – абсолютно истинное значение. Для описания цифровых карт ниже потребуется использовать $k \geq 256$.

Вместо хорошо известных булевых логических операций И, ИЛИ, НЕ в ААЖ [4] используется полная система логических операторов $\langle 0, 1, \dots, k-1, X(a, b), *, + \rangle$, которая включает в себя константы $0, 1, \dots, k-1$, оператор $(*) = \text{MIN}(x, y)$, оператор $(+) = \text{MAX}(x, y)$ и оператор $X(a, b)$, называемый “Литерал” и определяемый как

$$X(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b < x < a \\ k-1, & \text{если } a \leq x \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Произвольная МЗЛФ записывается либо как таблица истинности (ТИ), показанная на рис. 1(а), либо как эквивалентное логическое выражение, составленное из операторов MIN, MAX, $X(a, b)$ и записываемое в минимизированной форме (т.е. преобразованном и упрощенном виде, вычисляемом наиболее быстро) в виде выражения

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) = & 1 * X_1(a_{11}, b_{11}) * X_2(a_{12}, b_{12}) * \dots * X_n(a_{1n}, b_{1n}) + \\ & + 2 * X_1(a_{21}, b_{21}) * X_2(a_{22}, b_{22}) * \dots * X_n(a_{2n}, b_{2n}) + \\ & + (k-1) * X_1(a_{k-1,1}, b_{k-1,1}) * X_2(a_{k-1,2}, b_{k-1,2}) * \dots * X_n(a_{k-1,n}, b_{k-1,n}). \end{aligned} \quad (2)$$

При вычислении $F(x_1, \dots, x_n)$ в каждом из минтермов $C * X_1(a_{m,1}, b_{m,1}) * \dots * X_n(a_{m,n}, b_{m,n})$, где $C = \{0, 1, \dots, k-1\}$, для набора значений x_1, \dots, x_n вычисляют операторы $X_j(\dots)$. Если значение x_j не укладывается в интервал $[a_{q,j}, b_{q,j}]$, то соответствующий оператор $X_j(a_{q,j}, b_{q,j}) = 0$ и весь минтерм равен 0. В ином случае $X_j(\dots) = k-1$, а весь минтерм будет равен $\text{MIN}(k-1, C) = C$. Далее операторы MAX (+) выбирают наибольший из минтермов, содержащихся в (2).

МЗЛФ вида (2) однозначно описывается [4] множеством пар параметров (a, b) , где $b \geq a$, записываемых в виде структуры данных, показанной на рис. 1(б). Максимальное количество таких параметров $N_{a,b}$ (если все пары (a, b) содержат ненулевые значения) составляет [2]

$$N_{a,b} = 2(k-1)n. \quad (3)$$

Для описания математических моделей [5] также могут быть использованы неминимизированные выражения для МЗЛФ [8], записываемые в виде

$$F(x_1, \dots, x_n) = (1 * X_1(a_{11}^1, b_{11}^1) * \dots * X_n(\dots) + \dots + (k-1) * X_1(\dots) * \dots * X_n(\dots)) + \quad (4)$$

$N_{\text{строки}}$	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$F(x_1, \dots, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$F(0, 0, \dots, 0)$
1	1	0	...	0	0	$F(1, 0, \dots, 0)$
2	2	0	...	0	0	$F(2, 0, \dots, 0)$
...
$k^n - 1$	$k-1$	$k-1$...	$k-1$	$k-1$	$F(k-1, \dots, k-1)$

(a)

C	x_1	x_2	...	x_n
0	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	...	a_{1n}, b_{1n}
1	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	...	a_{2n}, b_{2n}
...
$k-1$	$a_{k-1,1}, b_{k-1,1}$	$a_{k-1,2}, b_{k-1,2}$...	$a_{k-1,n}, b_{k-1,n}$

(b)

Рис. 1: (a) Таблица истинности многозначно-логической функции $F(x_1, \dots, x_n)$. (b) Структура массива данных, задающего МЗЛФ в виде упорядоченного набора пар параметров (a, b) . Столбец C указывает, к минтерму с какой логической константой C относятся соответствующие пары (a, b) , заданные для x_1, \dots, x_n .

$$+(1 * X_1(a_{11}^2, b_{11}^2)) * \dots * X_n(\dots) + \dots + (k - 1) * X_1(\dots) * \dots * X_n(\dots) + \dots$$

В общем случае непредсказуемость затрат времени на минимизацию выражения (4) составляет основную сложность практического использования моделей МЗЛФ.

Для цифрового описания карты местности в данной работе предлагается использовать МЗЛФ, для которой выражение (2) или (4) составляют на основании табличных данных, представленных в виде ТИ. Входные логические переменные x_1, \dots, x_n используются для ввода пространственных координат (x, y, z) и дополнительных параметров поиска информации на карте, а значения выходной переменной y указывают параметры классификации объектов карты. При этом под заданной на карте “точкой” можно понимать как набор пространственных координат, так и расширенный набор логических переменных, включающий координаты и дополнительные переменные поиска объектов. Такая цифровая карта называется ниже МЗЛФ картой.

Максимальная информационная емкость МЗЛФ карты. Для МЗЛФ с числом логических уровней k и числом входных переменных n , число строк в ТИ [6], или число

различных наборов значений входных переменных x_1, \dots, x_n , составляет

$$N_{\text{strokTI}} = k^n, \tag{5}$$

в то время как для булевой логики с $k = 2N_{\text{strokTI}} = 2^n$. По сути, выражение (5) ограничивает максимальную информационную емкость карты, указывая предельно возможное число различных “точек” (или логических значений), отображаемых на МЗЛФ карте. На языке математических терминов здесь было бы корректней говорить о комбинаторной размерности множества логических значений, отображаемых на цифровой карте, но для краткости далее будем просто использовать величину N_{strokTI} . При этом число всех возможных МЗЛФ [2, 3], т.е. число вариантов заполнения столбца $F(x_1, \dots, x_n)$ в ТИ, равно

$$N_{\text{log.funk}} = k^{k^n}, \tag{6}$$

вместо $N_{\text{bylev.funk}} = 2^{2^n}$ в булевой логике.

В табл. 1 для минимизированной формы (2) и различных значений k и n приведены оценки N_{strokTI} , $N_{\text{log.funk}}$, а также количества параметров $N_{a,b}$, необходимого для записи МЗЛФ в виде (2), и необходимого объема памяти для хранения массива параметров (a, b) . Булевой логике в табл.1 соответствуют строки с $k = 2$. Приведенные в табл. 1 оценки для $n = 30$ и 256 , а также для $k = 2, 256$ и 65536 свидетельствуют об огромном приросте N_{strokTI} для МЗЛФ по сравнению с булевой логикой, и демонстрируют исключительно высокие размерности множества логических значений, отображаемого на МЗЛФ карте ($\sim 10^{72} - 10^{1233}$). Однако, как показано ниже, с точки зрения современной математики эти величины не являются чем-то экстраординарным.

Т а б л и ц а 1

Параметры информационной емкости для булевых функций ($k = 2$) и МЗЛФ ($k > 2$)

n	k	$N_{\text{strokTI}} = k^n$	$N_{\text{log.funk.}} = k^{k^n}$	$N_{a,b} = 2(k - 1)n$	Объем ПЗУ для массива (a, b)
30	2	1073741824	$\approx 1.15 \cdot 10^{18}$	–	–
256	2	$\approx 1.16 \cdot 10^{77}$	$\approx 1.34 \cdot 10^{154}$	–	–
30	256	$\approx 1.76 \cdot 10^{72}$	$\approx 1.92 \cdot 10^{18495}$	14848	14. 5 КБ
256	256	$\approx 3.23 \cdot 10^{616}$	$\approx 2.2 \cdot 10^{157826}$	130560	127.5 КБ
30	65536	$\approx 2.58 \cdot 10^{144}$	$> 10^{9462557}$	3932100	≈ 3.74 МБ
256	65536	$\approx 1.04 \cdot 10^{1233}$	$> 10^{80747154}$	33553920	≈ 32 МБ

Опубликованные в литературе наибольшие размерности множества значений для вычислительных моделей. В целом ряде вычислительных моделей теории игр, криптографии, космологии и теории чисел [7–11, 13] ранее были использованы числовые или физические параметры, величина которых намного превышает приведенные выше размерности множества логических значений для МЗЛФ. В табл. 2 показаны некоторые из этих данных, включая и уже прошедшие проверку временем результаты [9–11, 13], и менее надежно апробированные данные [12]. Оценивая корректность цитируемых работ по числу и результатам близких публикаций, наиболее обоснованной из них представляется работа [10], авторы которой в целях криптографических разработок вычислили самое большое простое число (известное на 2006 г.), составившее $1.24575039 \times 10^{9808307}$. Поэтому в обозримом будущем приемы обработки особо больших массивов данных для МЗЛФ карт, скорее всего, могут базироваться на вычислительных ресурсах и опыте вычислений из области криптографии. Но при этом математикам известны и гораздо большие величины, для записи которых ранее были предложены нотации Г. Стенхауза и Л. Мозера, а также записи сверхстепени Д. Кнута [7, 8].

Факторы, ограничивающие информационную емкость МЗЛФ карт. В криптографических моделях МЗЛФ [2, 3], реализующих аналог классического кода Вернама, высокие размерности множества ключей можно реализовать сравнительно легко, используя специальные алгоритмы и генератор случайных чисел. При этом одноразовыми ключами являются случайные перестановки длинной исходной последовательности чисел $\{0, 1, \dots, 255\}$, что даже для 8-битной элементной базы обеспечивает размерность множества секретных ключей $P_n = n! = 256! \sim 10^{500}$ [2, 3].

В случае же МЗЛФ карты максимальный объем содержащейся в ней информации по-прежнему будет определяться величинами k и n , но практически достижимый объем полезной информации будет ограничиваться количеством минимизированных минтермов, производительностью компьютера, а также структурой записываемых в карту исходных данных. По этой причине МЗЛФ модели выгодней всего использовать для сравнительно редко обновляемых структур знаний, например, цифровых карт местности, где небольшой объем изменений и дополнений можно записать на отдельную страницу карты.

Т а б л и ц а 2

Максимальные размерности множества значений вычислительной модели в различных областях знаний

Число	Название, автор, источник	Область использования	Год публ.
2×10^{116}	Я. И. Перельман, [9]	Число возможных шахм. партий.	1949
$1.24575039 \times 10^{9808357}$	С. Соорег и S. Воопе, [10]	В криптогр. – наибольш. простое число, извест. на 4 сент. 2006 г.	2006
$10^{10^{100}}$	Гуголплекс, Э. Каснер, [11]	Теория чисел.	1940
$10^{10^{10^{122}}}$	D. N. Page, [12]	Размер Вселен. после расш., нормир. ед. [12]	2006
$e^{e^{e^{713.705}}} \sim 10^{10^{1000}}$	Второе число Скьюза, S. Skewes, [13]	Число, до которого справедл. гипотеза Риманна для прост. чис.	1933

Особенности построения моделей МЗЛФ для работы с цифровой картой. ААЖ позволяет достаточно гибко формировать модель цифровой карты, привязанной к сетке координат (x, y, z) , поскольку определение (1) оператора $X(a, b)$ допускает весьма простую интерпретацию. Рассмотрим пример черно-белого изображения трехмерного объекта, см. рис. 2 (а) и (б), состоящего из двух фрагментов $\Phi 1$ и $\Phi 2$. Для простоты не учитываем характер освещенности объекта. На рис. 2 (а) показана проекция $x - z$, а на рис. 2 (б) – проекция $x - y$. Нижняя и верхняя границы фрагмента $\Phi 1$ на оси $0x$ обозначены как (a_{x1}, b_{x1}) , на оси $0y$ как (a_{y1}, b_{y1}) и на оси $0z$ как (a_{z1}, b_{z1}) . Для фрагмента $\Phi 2$, соответственно, границы обозначены как (a_{x2}, b_{x2}) , (a_{y2}, b_{y2}) и (a_{z2}, b_{z2}) . Для $\Phi 1$ и $\Phi 2$ рассмотрим оператор

$$X_x(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_x < x < a_x \\ k - 1, & \text{если } a_x \leq x \leq b_x, \end{cases} \quad (7)$$

области ненулевых значений которого для наглядности выделены серым на рис. 2 (с) и (д). Поскольку для $a_{x1} \leq x \leq b_{x1}$ оператор $X_x = k - 1$, то для $\Phi 1$ будем интерпретировать X_x как оператор, указывающий принадлежность указанных выше точек оси $0x$ к фрагменту $\Phi 1$. Аналогично, для $a_{x2} \leq x \leq b_{x2}$ оператор X_x указывает принадлежность точек оси $0x$ к $\Phi 2$. По тому же принципу можно ввести операторы X_y и X_z для осей $0y$, $0z$. Если модель объекта, которому припишем метку C , должна описывать

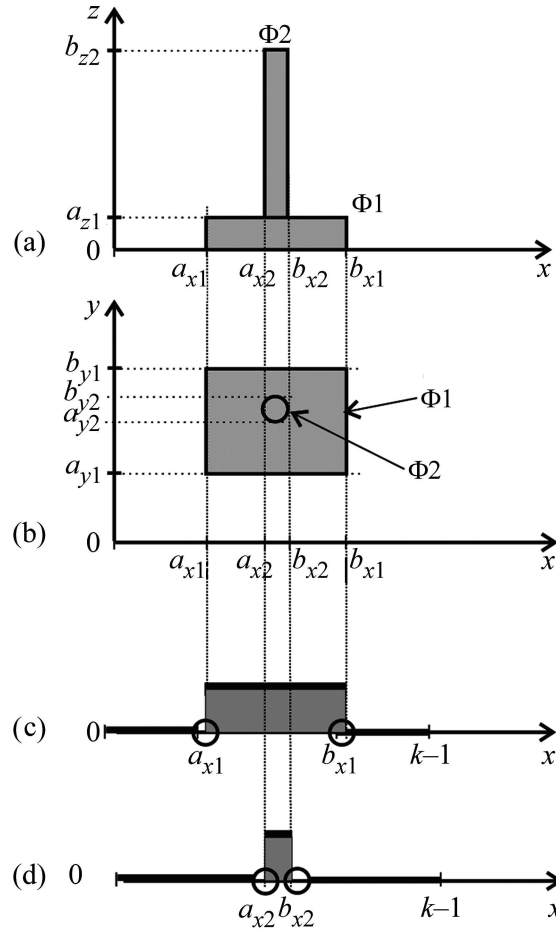


Рис. 2: (а) Проекция $x - z$ фрагментов $\Phi 1$ и $\Phi 2$ исходного изображения. (б) Проекция $x - y$ для фрагментов $\Phi 1$ и $\Phi 2$. (с) Для оператора $X(a, b)$, описывающего положение фрагмента $\Phi 1$ относительно пространственной координаты x , параметры a, b равны физическим границам фрагмента a_{x1}, b_{x1} . (д) Для оператора $X(a, b)$, описывающего положение фрагмента $\Phi 2$ относительно координаты x , параметры a, b равны границам a_{x2}, b_{x2} .

все точки пространства, принадлежащие данному объекту, то для $\Phi 1$ запишем минтерм $C * X_x(a_{x1}, b_{x1}) * X_y(a_{y1}, b_{y1}) * X_z(0, a_{z1})$, а фрагменту $\Phi 2$ будет соответствовать $C * X_x(a_{x2}, b_{x2}) * X_y(a_{y2}, b_{y2}) * X_z(a_{z1}, b_{z2})$. Общую модель составного объекта на рис. 2 (а), (б) запишем как

$$M = C * X_x(a_{x1}, b_{x1}) * X_y(a_{y1}, b_{y1}) * X_z(0, a_{z1}) + C * X_x(a_{x2}, b_{x2}) * X_y(a_{y2}, b_{y2}) * X_z(a_{z1}, b_{z2}). \quad (8)$$

Непосредственной подстановкой в (8) можно убедиться в том, что для любой точки

(x, y, z) , взятой внутри области, выделенной серым цветом на рис. 2 (а) и (б), получим значение $M = C$. Таким образом, ААЖ позволяет описать и отдельно взятый параллелепипед, и составной объект. Способ описания объектов сложной формы выходит за рамки данной работы.

Если модель должна описывать цвет фрагментов, освещенность и другие характеристики, то в выражении (8) потребуется вводить дополнительные переменные. При этом в МЗЛФ карте можно произвольно комбинировать независимые пространственные координаты (x, y, z) и взаимосвязанные переменные, например, R, G, B , описывающие цветовые сигналы в телевизионном формате. Это обусловлено тем, что в рамках ААЖ значение параметра k всегда можно выбрать с достаточно большим запасом, чтобы в явном виде задать все возможные комбинации взаимосвязанных переменных.

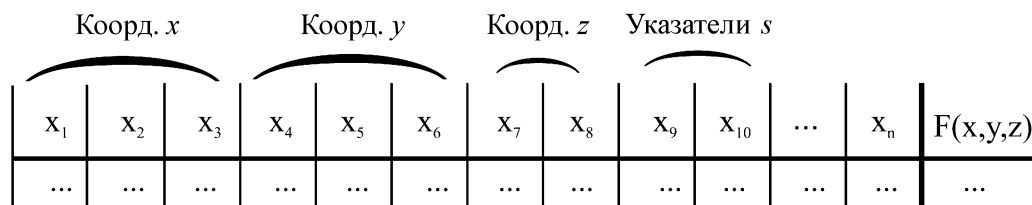


Рис. 3: Способ описания цифровой карты в виде ТИ МЗЛФ, использующий несколько шкал с различным масштабом для координат x, y, z . В столбце значений функции $F(x, y, z)$ логические значения $\{0, 1, \dots, k-1\}$ указывают классы объектов или событий, задаваемых на цифровой карте. Расширенное описание классов объектов или событий задано посредством переменных s -дополнительных указателей меток объектов и событий.

Цифровая карта местности может быть представлена в виде ТИ на рис. 3, где значения функции $F(x, y, z)$ обозначают метки (номера или виды) объектов и событий, отображаемых на карте. Поскольку на рис. 3 каждая из переменных может принимать лишь $k - 1$ дискретных значений, то исходно размер поля или разрешение карты сильно ограничены. Но данный недостаток легко обойти, если ввести для каждой из переменных x, y, z несколько шкал с отдельным описанием разрядов единиц, десятков и сотен, используя, например, вместо $x = 857$, запись $x_1 = 8, x_2 = 5, x_3 = 7$. При этом координате x соответствует тройка параметров x_1, x_2 и x_3 , а координате $y - x_4, x_5$ и x_6 . Поскольку диапазон изменения высот z обычно много меньше, чем для x и y , то z можно описать двумя переменными x_7 и x_8 . Кроме того, вместо высоты z можно задавать этаж объекта.

Представление цифровой карты в виде МЗЛФ также удобно с точки зрения процедур упрощенного анализа данных. Например, отсутствие объекта с меткой C в точке с индексированными координатами (x, y, z) можно установить даже без вычислений минтермов путем простого анализа массива пар параметров (a, b) , показанного на рис. 1(b). Для этого достаточно убедиться, что в строке для заданной C текущее значение соответствующей индексированной переменной не принадлежит интервалу $[a, b]$.

Для описания сложной структуры объектов в цифровой МЗЛФ карте на рис. 3 целесообразно дополнительно ввести одну или несколько вспомогательных переменных s , описывающих подклассы объектов. На последнем этапе вычисления МЗЛФ подстановка значений s от 0 до $k - 1$ позволит “просматривать” отдельно для каждого подкласса s все имеющиеся на карте объекты с метками $F(x, y, z)$.

Выводы. Аппарат дискретной k -значной алгебры Аллена–Живона предлагается использовать для построения цифровых карт, записываемых в виде МЗЛФ. Выигрыш заключается в высокой информационной емкости такой карты при весьма скромном объеме занимаемой памяти. Кроме того, цифровую карту, заданную в виде МЗЛФ, будет легче шифровать с помощью ранее разработанных криптографических кодов МЗЛФ. Реальная информационная емкость системы на базе МЗЛФ будет ограничена прежде всего способом формирования ТИ и временем минимизации логических выражений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Ю. С. Затуливетер, *Труды конф. “Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения”*, Москва, 2010 (Москва, ИПУ, 2010), с. 000493.
- [2] A. L. Antipov, A. Yu. Bykovsky et al., *J. Russian Laser Research* **27**(5), 492 (2006).
- [3] А. Л. Антипов, А. Ю. Быковский и др., *Радиотехника*, N8, 97 (2008).
- [4] D. C. Rine ed. *Computer Science and Multiple-Valued Logic: Theory and Applications*, Ch.7-9 (Amsterdam, North Holland, 1984).
- [5] A. Yu. Bykovsky, A. A. Egorov and B. Yu. Rager, *Pacific Science Review* **13**(3), 140 (2011).
- [6] П. Н. Шимбирев, *Гибридные непрерывно-логические устройства* (М., Энергоатомиздат, 1990).
- [7] J. H. Conway and R. Guy, *The Book of Numbers* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [8] http://www.mrob.com/pub/math/numbers-24.html#fn_38.
- [9] Я. И. Перельман, *Занимательная алгебра*, 4-е изд. (Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва–Ленинград, 1949).

- [10] <http://mrob.com/pub/math/numbers-21.html>.
- [11] http://mrob.com/pub/num/n-e100_1-googol-googolplex.html.
- [12] D. N. Page, arXiv:hep-th/0610199v2 (2006).
- [13] S. Skewes, J. London Math. Soc. **8**, 277 (1933).

Поступила в редакцию 5 декабря 2012 г.