

## О РОЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ТЕОРИИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

П. И. Безотосный, С. Ю. Гаврилкин, А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков

*Численными методами было изучено влияние граничных условий на решения уравнений Гинзбурга–Ландау (ГЛ) для сверхпроводящих пластин в безвихревом пределе. На основании самосогласованного решения системы уравнений ГЛ была найдена зависимость критического тока  $I_c$  от величины внешнего магнитного поля, получено распределение параметра порядка по толщине пластины. При решении уравнений с граничными условиями общего вида обнаружено уменьшение критической температуры и плотности критического тока по сравнению со значениями этих величин, получаемыми при решении уравнений с обычными граничными условиями. По итогам проведенной работы выявлено, что применение граничных условий общего вида приводит к ряду интересных результатов, которые не наблюдались при применении обычных граничных условий. В статье обсуждены границы применимости безвихревого предела для пленок толщиной порядка длины когерентности  $\xi$ . Проанализировано, как граничные условия влияют на применимость данного предела.*

**Ключевые слова:** сверхпроводящие плёнки, критический ток, граничные условия, теория Гинзбурга–Ландау.

*Введение.* Данная работа посвящена изучению роли граничных условий общего вида в макроскопической теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [1]. Выбор граничных условий важен при решении уравнений ГЛ, особенно в случае высокотемпературных сверхпроводников. Граничное условие общего вида на параметр порядка было получено в работе [2], исходя из принципа минимума свободной энергии, и оно имеет

вид:

$$\vec{n} \left( -\nabla + \frac{2ei}{c\hbar} A \right) \Psi|_S = \frac{1}{\Lambda} \Psi_S, \quad (1)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\Lambda$  – феноменологический коэффициент размерности длины, иногда называемый длиной экстраполяции (коэффициент  $\Lambda$  определяется свойствами материала, с которым граничит сверхпроводник),  $\Psi$  – параметр порядка,  $S$  – граница.

В случае обычных низкотемпературных сверхпроводников для их границы с диэлектриком справедливо обычное условие вида:

$$\vec{n} \left( -\nabla + \frac{2ei}{c\hbar} A \right) \Psi|_S = 0, \quad (2)$$

которое, как правило, используется в аналитических и численных расчетах.

Для ВТСП  $\Lambda$  принимает конечные значения, и при расчетах для таких сверхпроводников необходимо использовать граничные условия общего вида (1).

Вопрос выбора граничных условий имеет особое значение для объектов, свойства которых во многом зависят от свойств их границы, таких как, например, тонкие пленки или пластины. В последнее время большое внимание уделялось исследованию сверхпроводников конечных размеров различной геометрии с помощью решения уравнений ГЛ [3–10]. В наших исследованиях, на основе безвихревого подхода, в рамках которого критический ток эквивалентен току распаривания, изучалось критическое состояние сверхпроводящих пластин, помещенных во внешнее магнитное поле, параллельное их поверхности, и несущих транспортный ток, направление которого перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля. Примеры результатов численного решения подобной задачи с использованием граничных условий в виде (2) приведены в работе [11].

Данное направление исследований представляет интерес, так как уравнения ГЛ имеют фундаментальный характер и нахождение их точного решения полезно для многих задач сверхпроводимости, в частности для проверки применимости самих уравнений для описания свойств высокотемпературных сверхпроводников. Кроме того, результаты настоящей работы позволяют лучше понять процессы, происходящие в реальных сверхпроводящих структурах.

*Формулировка задачи.* В рамках работы численными методами решались уравнения ГЛ для случая длинной и широкой сверхпроводящей пластины толщиной  $D$  в магнитном поле  $H$ . Задача рассматривалась в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  с осями  $y$  и  $z$ , направленными параллельно плоскости поверхности пластин, причем ось  $z$  направлена параллельно внешнему магнитному полю, а транспортный ток течет вдоль оси  $y$ . В

качестве транспортного тока  $I_t$  использовалось произведение его плотности на толщину пластины, т. е. ток, приходящийся на единицу ширины пластины. На основе самосогласованного решения системы уравнений ГЛ находилась зависимость критического тока  $I_c$  от величины внешнего магнитного поля  $H$ . При этом полагалось, что сверхпроводящая пластина находится в безвихревом состоянии. Используя обычный метод выбора калибровки вектора-потенциала  $A$ , можно записать уравнения Гинзбурга–Ландау в следующем виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx_\xi^2} + (\psi - \psi^3) - \frac{U^2}{\kappa^2}\Psi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2U}{dx_\xi^2} - \frac{\psi^2}{\kappa^2}U = 0, \quad (4)$$

где  $\kappa = \lambda/\xi$  – параметр Гинзбурга–Ландау,  $\lambda$  – глубина проникновения магнитного поля,  $\xi$  – длина когерентности, а  $\psi$  – нормированный параметр порядка:

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0},$$

где  $\Psi_0$  – параметр порядка в глубине сверхпроводника при нулевом внешнем магнитном поле. При этом векторный потенциал имеет лишь  $y$ -компоненту,  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_y A(x)$ . Вместо размерных значений потенциала  $A$ , индукции поля  $B$  и плотности тока  $j_S$  в сверхпроводнике здесь введены безразмерные величины  $U(x_\xi)$ ,  $b(x_\xi)$  и  $j(x_\xi)$ :

$$A = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa\xi}U, \quad B = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa^2\xi^2}b, \quad j_S = \frac{c\phi_0}{8\pi^2\kappa^3\xi^3}j, \quad (5)$$

где  $\phi_0$  – квант потока.

Для уравнения (3) выберем граничные условия в виде:

$$\frac{d\psi}{dx_\xi}\Big|_{x_\xi=0} = \frac{\psi(0)}{\Lambda}, \quad \frac{d\psi}{dx_\xi}\Big|_{x_\xi=d} = -\frac{\psi(d)}{\Lambda}, \quad (6)$$

где  $x_\xi = \frac{x}{\xi}$  и  $d = \frac{D}{\xi}$ . Поскольку транспортный ток  $I_t$  в пластине создает магнитное поле

$$H_I = \frac{2\pi}{c}I_t,$$

полное поле вблизи поверхностей пластины равно  $H \pm H_I$ , и граничные условия к уравнению (4) имеют следующий вид:

$$b|_{x_\xi=0} = h - h_I, \quad b|_{x_\xi=d} = h + h_I,$$

где

$$h = \frac{H}{H_\xi}, \quad h_I = \frac{H_I}{H_\xi}, \quad H_\xi = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa^2\xi^2}.$$

Глубина проникновения магнитного поля  $\lambda$  и длина когерентности  $\xi$  зависят от температуры. Поэтому приведенные выражения являются неявными функциями температуры и формально справедливы при любой температуре  $T$ . Однако сами уравнения Гинзбурга–Ландау применимы лишь в пределе  $T \rightarrow T_c$ .

Применялась следующая итерационная процедура нахождения самосогласованных решений системы уравнений (3), (4). Первоначально задавалась некоторая пробная функция параметра порядка  $\psi(x_\xi)$  и находилось решение уравнения (4) для функции  $U(x_\xi)$ . Найденная  $U(x_\xi)$  подставлялась затем в уравнение (3), и с учетом граничных условий (6) находилась новая функция  $\psi(x_\xi)$ . Далее вновь решалось уравнение (4), и вся процедура повторялась, пока функции  $\psi(x_\xi)$  и  $U(x_\xi)$  не переставали меняться и, таким образом, представляли собой самосогласованное решение системы. Очевидно, что найденное таким методом решение устойчиво, поскольку оно не меняется при малых первоначальных возмущениях. Значение критического тока  $I_c$  сверхпроводящей пластины принималось равным значению транспортного тока  $I_t$ , при котором значение параметра порядка становилось равным нулю,  $\psi(x_\xi) = 0$ . Таким методом находилась зависимость критического тока на единицу ширины сверхпроводящей пластины от величины внешнего магнитного поля  $h$ , в котором она находится.

*Результаты численных расчетов.* Примеры зависимостей  $I_c(h)$ , полученных при расчетах для граничных условий вида (1) с  $\Lambda = 2$  и граничных условий вида (2), приведены на рис. 1 для параметра  $\kappa = 2$  (сверхпроводник второго рода) и для нескольких значений толщины  $d$  сверхпроводящей пластины. Сравнение зависимостей  $I_c(h)$  при соответствующих магнитных полях для различных граничных условий показывает, что при конечных  $\Lambda$  значения критического тока меньше, чем при  $\lambda = \infty$ . При этом, чем меньше  $\Lambda$ , тем меньше критический ток и его плотность при заданном внешнем магнитном поле.

Обычно полагается, что значение критического тока (плотности критического тока), получаемое при решении системы уравнений ГЛ, представляет собой ток распаривания Гинзбурга–Ландау, который является оценкой сверху для значения критического тока (его плотности). Например, в работе [12] была осуществлена попытка достижения тока распаривания Гинзбурга–Ландау для тонких оловянных пленок, однако, этого не удалось сделать. Значения критического тока (его плотности), получаемые при расчетах с использованием граничных условий в виде (2), превосходят соответствующие их значе-

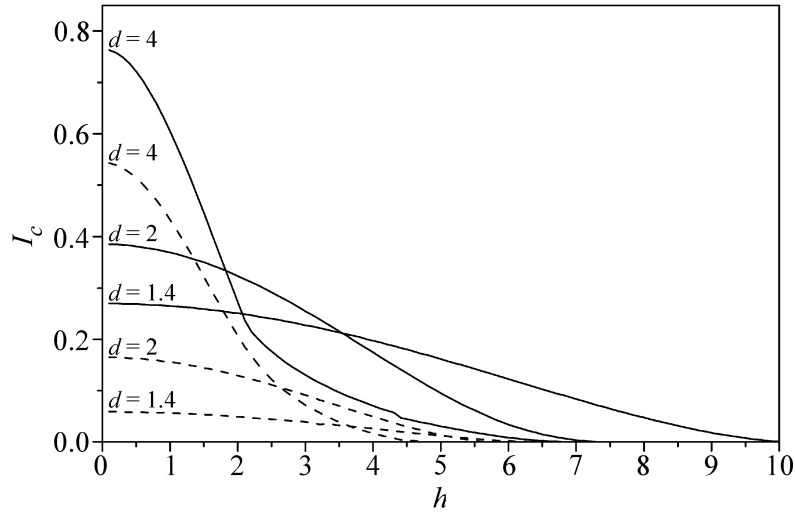


Рис. 1: Зависимость критического тока от магнитного поля для сверхпроводящих пластин различной толщины с параметром границы  $\Lambda = \infty$  (сплошная линия) и  $\Lambda = 2$  (пунктирная линия). В этом случае  $\kappa = 2$ .

ния, получаемые экспериментально. Использование в численных расчетах граничных условий в виде (1) с конечными  $\Lambda$  позволяет получить значения критического тока, более близкие к экспериментальным данным. Таким образом, учет влияния границы для тонких пленок позволяет получить физически более обоснованные решения.

Теперь проанализируем распределение параметра порядка  $\psi(x_\xi)$  для  $d = 4$  и  $\kappa = 2$ , полученное при различных значениях длины экстраполяции  $\Lambda$  ( $\Lambda = 2$  и  $\Lambda = \infty$ ). Зависимости параметра  $\psi(x_\xi)$  при некоторых значениях  $h$  приведены на рис. 2. При этом значение транспортного тока принималось равным нулю. Качественно распределения параметра порядка при  $\Lambda = 2$  и  $\Lambda = \infty$  совпадают. Однако обнаружено количественное отличие полученных результатов, что приводит к количественному отличию макроскопических параметров, таких как критическая температура и критический ток.

В работе [11] для пластины  $d = 12$  проводились расчеты с использованием граничных условий в виде (2), и была получена перестройка из мейснеровского состояния в состояние с поверхностной сверхпроводимостью. Данная перестройка проявлялась в том, что распределение параметра порядка по толщине при увеличении значения внешнего магнитного поля выше определенного уровня, имеет свой максимум не у центра пластины, а у одного из краев. Похожая перестройка наблюдается для пластины толщиной  $d = 4$ , как при использовании в расчетах обычных граничных условий, так и гранич-

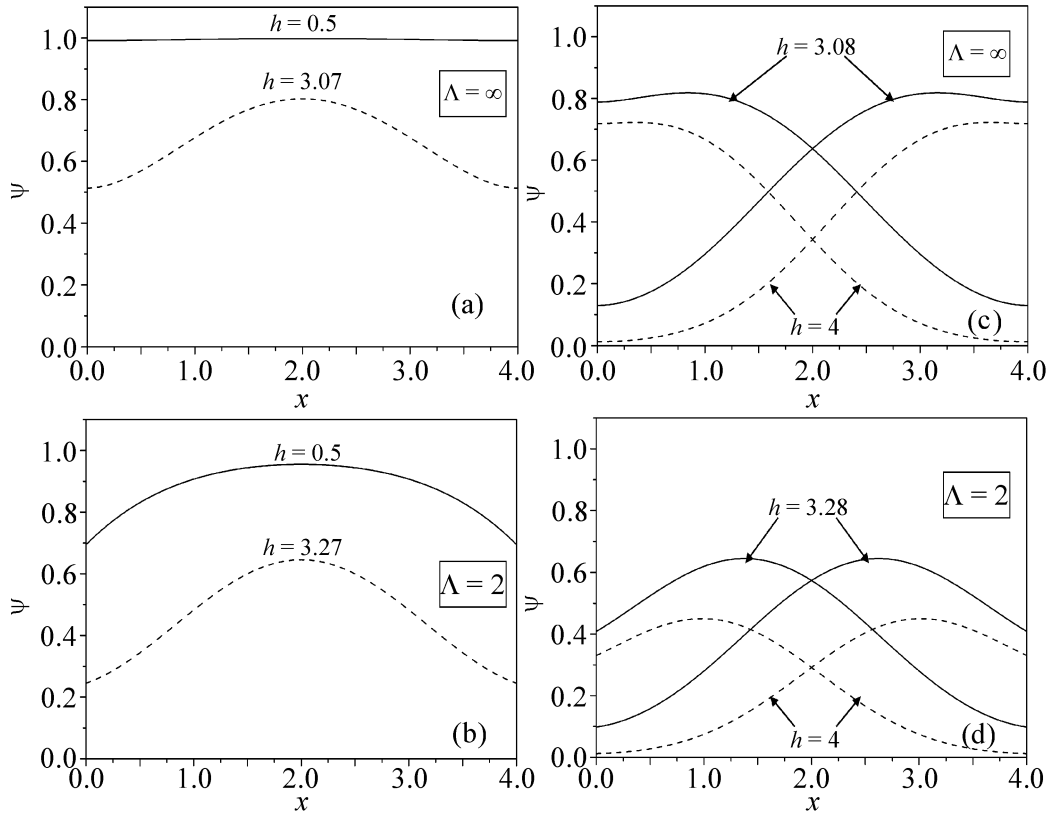


Рис. 2: Распределение параметра порядка по толщине сверхпроводящей пластины с параметром границы  $\Lambda = \infty$  ((а), (в)) и  $\Lambda = 2$  ((б), (г)),  $\kappa = 2$ , толщина пластины  $d = 4$ .

ных условий в виде (1) с конечными значениями длин экстраполяции  $\Lambda$ . При этом для граничных условий общего типа перестройка происходила при других значениях внешнего магнитного поля  $h$ , чем для обычных граничных условий. Стоит отметить, что в отличие от результатов, полученных в работе [11], в данной работе расчеты проведены для случая отсутствия транспортного тока в пластине. Это приводит, в свою очередь, к тому, что условия на обеих границах пластины идентичны, и задача становится симметричной. Поэтому в рассматриваемом нами случае ( $d = 4$ ) решения уравнения ГЛ на параметр порядка, соответствующие внешнему магнитному полю ниже определенного порогового значения, дают симметричное распределение параметра порядка по толщине пластины (рис. 2(а), (б)). При увеличении поля выше порогового значения, система уравнений имеет два равнозначных решения, соответствующих распределениям параметра порядка по толщине с максимумами у границ пластины (рис. 2(в), (г)).

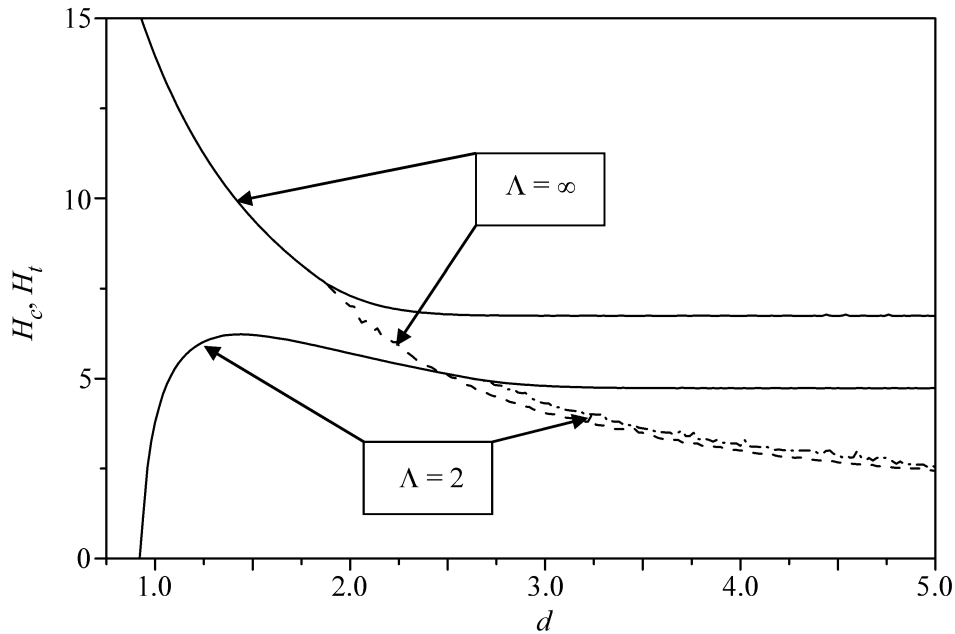


Рис. 3: Зависимость поля перестройки из мейснеровского в вихревое состояния ( $H_t$ ) и критического поля ( $H_c$ ) от толщины пластины с параметром границы  $\Lambda = \infty$  (сплошная линия для критического поля, пунктирная для поля перестройки) и  $\Lambda = 2$  (сплошная линия для критического поля, штрихпунктирная для поля перестройки),  $\kappa = 2$ .

Аналогичная ситуация была рассмотрена аналитически Тинкхамом [13] путем решения уравнений ГЛ с использованием обычных граничных условий. Было получено, что если толщина пластины выше значения 1.81, в пластине, находящейся в параллельном поверхности магнитном поле, реализуется ситуация с двумя равнозначными решениями уравнения ГЛ для параметра порядка. При этом суперпозиция данных решений, рассматривалась как решение системы уравнений ГЛ и соответствовала зарождению вихря в пластине. В рамках работы мы проанализировали зависимость поля, для которого наблюдается обозначенная перестройка, от толщины пластины для граничных условий различного вида (см. рис. 3). Проведенные расчеты позволяют определить максимальную толщину пластины, для которой такой перестройки еще нет (толщину, до которой в пластине вплоть до критического поля сохраняется мейснеровское состояние). При  $\kappa = 2$  и при отсутствии транспортного тока для старых граничных условий (2) такая толщина составила 1.81 (что точно соответствует аналитическим расчетам), а для новых граничных условий (1) 2.62. Учитывая, что полученная нами зависимость показывает магнитное поле, выше которого начинается зарождение вихрей для раз-

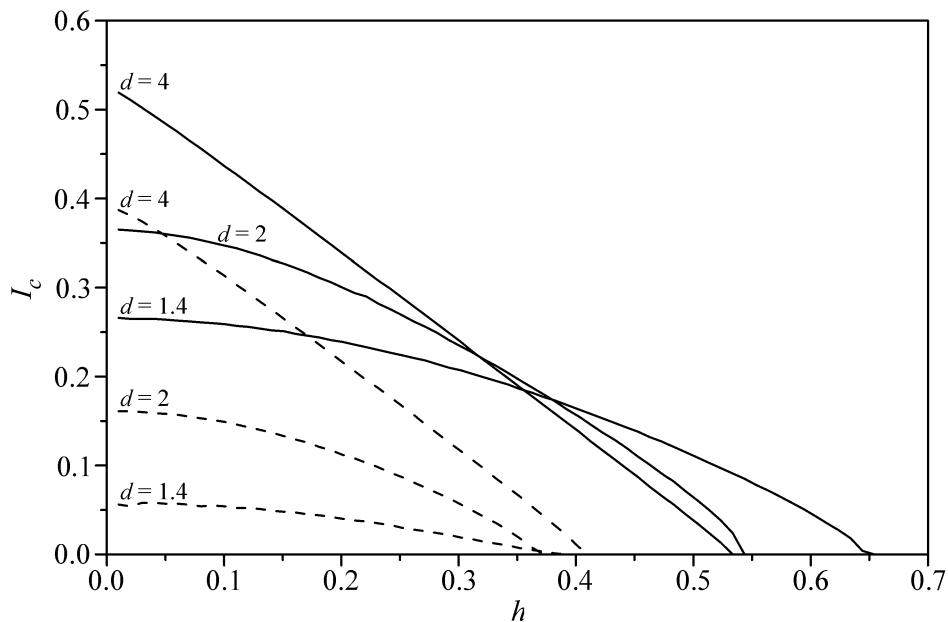


Рис. 4: Зависимость критического тока от магнитного поля для сверхпроводящих пластин различной толщины с параметром границы  $\Lambda = \infty$  (сплошная линия) и  $\Lambda = 2$  (пунктирная линия),  $\kappa = 0.5$ .

личных толщин пластины, можно сделать вывод, что данная кривая задает границы безвихревого предела для пластины, находящейся в параллельном поверхности магнитном поле. Здесь стоит отметить, что для случая, соответствующего решению уравнений ГЛ с граничными условиями общего типа, пределы безвихревого предела шире (см. рис. 3). Ранее вопрос применимости безвихревого предела для пластин в параллельном поверхности магнитном поле с толщиной порядка длины когерентности  $\xi$  и при  $\kappa$  порядка 1 уже обсуждался [14], но в силу своей сложности точного ответа на него не было получено.

Аналогичные расчеты были проведены для  $\kappa = 0.5$  (сверхпроводников первого рода). Примеры графиков зависимостей для данного случая приведены на рис. 4 и 5. Как видно из рисунков, новые граничные условия оказывают еще большее влияние на результаты расчетов в случае сверхпроводников первого рода по сравнению со сверхпроводниками второго рода.

При численном решении системы уравнений Гинзбурга–Ландау с граничными условиями общего типа с конечными  $\Lambda$  обнаружена зависимость плотности критического тока от толщины пластины (см. рис. 6). Данный эффект неоднократно наблюдался в



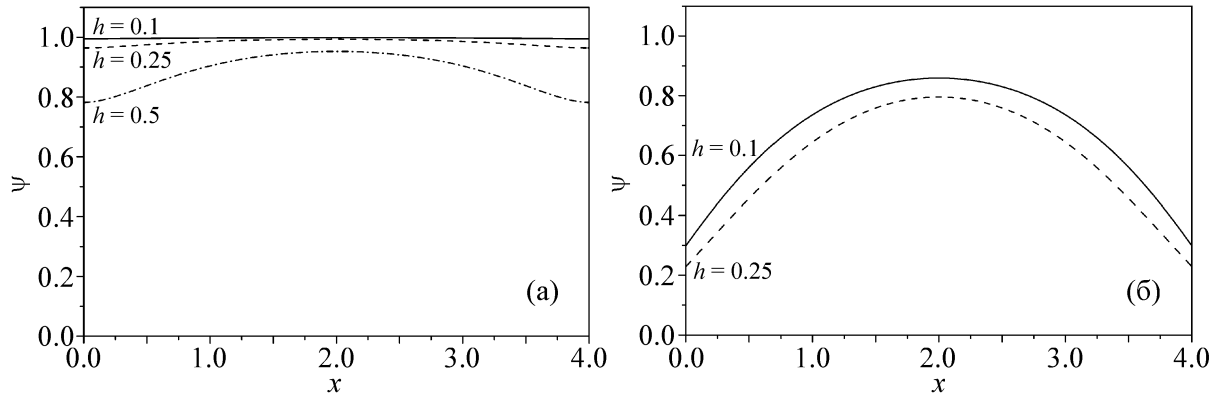


Рис. 5: Распределение параметра порядка по толщине сверхпроводящей пластины с параметром границы  $\Lambda = \infty$  (а) и  $\Lambda = 2$  (б),  $\kappa = 0.5$ , толщина пластины  $d = 4$ .

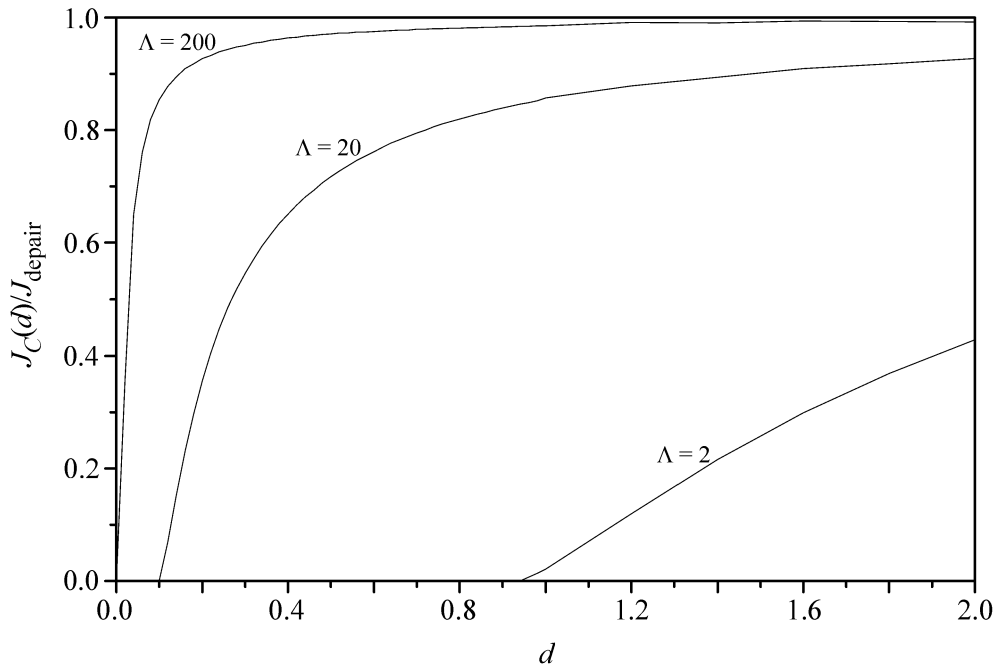


Рис. 6: Зависимость плотности критического тока, нормированной на плотность тока распаривания Гинзбурга-Ландау, для тонких пластин от их толщины для различных длин экстраполяции  $\Lambda$ ,  $\kappa = 2$ ,  $H = 0$ .

практике, однако, как правило, полагалось, что уменьшение плотности критического тока с уменьшением толщины пленок вызвано ухудшением структуры пленок: сверхтонкие пленки перестают быть однородными и приобретают островковый характер.

Интересный результат получен, когда границы пластины различны. В рамках рассматриваемой задачи данный факт выражается в различных значениях  $\Lambda$  для каждой из границ. В этом случае получено, что зависимость критического тока от внешнего магнитного поля изменяется при изменении направления транспортного тока, т.е. наблюдается анизотропия. Полученный эффект подтвержден экспериментально [15]. В ряде работ исследовался аналогичный эффект для слоистых структур. При этом объяснением данного эффекта являлось неравномерное распределение тока по различным слоям. В данном же случае явление обнаружено не для слоистых структур, а для цельной пластины.

*Заключение.* Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом:

В рамках безвихревого подхода использовались численные методы для решения уравнений Гинзбурга–Ландау с граничными условиями в виде (1) и (2), позволяющие получать распределения параметра порядка  $\psi(x_\xi)$ , магнитного поля и тока при различных значениях транспортного тока, пропускаемого через сверхпроводящую пластину, и параллельного магнитного поля  $h$ , в котором она находится. Получены зависимости критического тока сверхпроводящих пластин от величины внешнего магнитного поля и толщины пластины. Рассмотрен характер процессов, происходящих в сверхпроводящей пластине в зависимости от ее толщины. Установлены границы применимости безвихревого предела в случае пластины, находящейся в параллельном поверхности магнитном поле, проанализировано влияние граничных условий на данные границы применимости. Нами обнаружено, что изменение граничных условий приводит к существенным изменениям результатов расчета уравнений Гинзбурга–Ландау и к получению решений, которые лучше согласуются с экспериментом. Таким образом, изменение граничных условий в силу нелокальности уравнений Гинзбурга–Ландау приводит к изменению параметра порядка по всей толщине пленки и соответственно влияет на сверхпроводящие свойства всей пластины в целом.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **10**, 1064 (1950).
- [2] Е. А. Андрюшин, В. Л. Гинзбург, А. П. Силин, УФН **163**, 105 (1993).
- [3] H. J. Fink and A. G. Presson, Phys. Rev. **151**, 219 (1966).
- [4] V. V. Moshchalkov, X. G. Qiu, and V. Bruyndoncx, Phys. Rev. B **55**, 11793 (1997).

- [5] P. S. Deo, V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and A. K. Geim, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4653 (1997).
- [6] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **57**, 13817 (1998).
- [7] G. F. Zharkov, V. G. Zharkov, and A. Yu. Tsvetkov, *Phys. Rev. B* **61**, 12293 (2000).
- [8] Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, А. Ю. Цветков, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, № 11, 29 (2001).
- [9] Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, А. Ю. Цветков, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, № 12, 26 (2001).
- [10] А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, № 2, 35 (2002).
- [11] А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, *ЖЭТФ* **128**, 392 (2005).
- [12] В. Н. Губанков, К. К. Лихарев, Н. Б. Павлов, *ФТТ* **14**, 3186 (1972).
- [13] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity* (McGraw-Hill Book Company, 1975).
- [14] А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, А. Н. Лыков, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, № 6, 20 (2004).
- [15] P. I. Bezotosny, S. Y. Gavrilkina, A. N. Lykov, et al., *J Super-cond Nov Magn.* **24**, 1553 (2011).

Поступила в редакцию 23 января 2014 г.