УДК 530.12:531.51

КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ГРАВИТАЦИИ

Р. Ф. Полищук

Введена риман-каноническая тетрада, которая определяет в общем случае шесть 2-направлений экстремальных значений секционной римановой кривизны. Она локализует гравитационную энергию, определяет каноническую 1-форму связности и введённые автором канонические тетрадные токи, дающие законы сохранения в теории Эйнштейна–Картана.

Ключевые слова: тетрадное поле, гравитационная энергия, локальные и нелокальные интегральные законы сохранения, тетрадные токи, тождества Бьянки, кручение Картана.

"Понятие энергии играет центральную роль в современной теоретической физике", – такими словами начинает свой известный классический обзор "Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна" Л. Д. Фаддеев [1] и даёт её решение для случая островной физической системы. Наша цель – найти решение данной проблемы для общего случая. Мы попытаемся это сделать с помощью отождествления с самого начала потенциалов гравитационного поля не с метрикой пространства-времени (4×4 симметричная матрица, 10 функций), а с тетрадой (16 функций), задающей как метрику, так и, в частности, состояние движения наблюдателя (оно влияет на результаты измерения им масс частиц и тел как их гравитационных зарядов в его системе отсчёта), и, главное, с помощью придания уравнениям Эйнштейна вида уравнений Максвелла: они сразу дают для произвольной тетрады тетрадные токи, сохраняющиеся в том же смысле, в каком сохраняются электрические токи Максвелла в искривлённом мире [2, 3] (здесь – уже в мире Римана–Картана). Далее предлагается возможность ограничить выбор тетрадного поля требованием получения обычных интегральных законов сохранения для тождеств Бьянки (для тензора Римана с двумя координатными и двумя лоренцевыми индексами). Кстати, Л. Д. Фаддеев тоже ограничивает выбор, но не тетрады, а координат – для удалённого наблюдателя он вводит в окрестности пространственной бесконечности

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: rpol@asc.rssi.ru

асимптотически инерциальные системы отсчёта с помощью асимптотически декартовых координат, считая, что иначе невозможно решить проблему законов сохранения: чтобы определить полную гравитационную энергию физической системы, приходится уходить туда, где гравитации нет, и, по сути, рассматривать её как внешнее поле там, где она есть. Но эволюция нашей Метагалактики имеет асимптотику комплексной 4-сферы мира де Ситтера, где сохраняются и источники кривизны (без них мы имели бы мир Минковского), и полностью компенсирующая их 4-геометрия постоянной кривизны (гравитация). Для островной системы указанная компенсация положительной плотности материи отрицательной потенциальной гравитационной энергией частична. Кстати, заметим, что чётномерное пространство-время де Ситтера не параллелизуемо (характеристика Эйлера чётномерной топологической сферы равна двум, так что тетрадное поле имеет две особенности, и Большой Взрыв, возможно, имеет к этому отношение). Но в обобщающей теорию Эйнштейна M-теории с нечётной размерностью многообразия событий 11 оно параллелизуемо (во всяком случае, если оно допускает спинорную структуру [4]).

Напомним, что в упомянутом обзоре вводится функция Лагранжа (для лагранжиана без вторых производных потенциала) на асимптотически плоском пространстве и строится обобщённая гамильтонова формулировка теории тяготения по Дираку. Энергия островной физической системы определяется как генератор сдвига по асимптотическому времени. Показано, что полная энергия поля тяготения и полей материи с нормальным (подчиняющимся условиям энергодоминантности) тензором энергии-импульса (ТЭИ) положительна и исчезает только при отсутствии материи и гравитационных волн. Положительность полной энергии вслед за Виттеном [5] доказывается приведением её к квадратичной положительной форме от решения вспомогательного линейного уравнения, в которое поле тяготения входит как внешнее. При этом линейное уравнение – это уравнение Дирака, рассматриваемое на начальной гиперповерхности уровня координаты времени. Уравнение Дирака, как известно, требует перехода от метрики к тетраде с введением гамма-матриц и спиновой связности. Утверждается, что энергию (а также другие основные интегралы движения) можно ввести в случае, если пространство-время асимптотически плоское, то есть совпадает с пространством Минковского асимптотически на пространственной бесконечности. Утверждается также, что энергия гравитационного поля не локализуема, то есть не существует однозначно определённой плотности энергии. При этом именно асимптотическое условие позволяет определить динамику сдвига по времени как сдвига относительно наблюдателя, расположенного далеко от тяготеющей материи, и связать с ним энергию. А поскольку в космологии нет естественного сдвига по времени, то соответственно нет и понятия энергии [1]. Здесь дело в специфике принципа относительности в теории тяготения: ведь физической величиной является не метрика пространства-времени, а класс эквивалентных метрик, отличающихся произвольным преобразованием координат, согласованных с асимптотическими условиями. Таким образом, значение метрики в данной точке пространства-времени не имеет абсолютного значения, а сама теория тяготения в этом смысле является принципиально нелокальной.

Трудно переоценить это чёткое формулирование Л. Д. Фаддеевым проблемы энергии в гравитации и её решение для островной физической системы с помощью обобщённого гамильтонова формализма по Дираку для системы десяти уравнений Эйнштейна как системы со связями: переход от компактного описания гравитации на языке геометрических объектов в рамках четырёхмерной геометрии к их 1+3 расщеплению, как того требует формализм Дирака (ведь определение гамильтониана как оператора сдвига системы по времени требует выделения одномерного временного направления эволюции в четырёхмерном многообразии мировых точек-событий), сопровождается значительным техническим усложнением (заметим: этого усложнения нет в концепции тетрадных токов, восстанавливающей также 4-симметрию описания, о потере которой Дирак с его 1+3 расщеплением мира сожалел). В качестве примера работы указанного формализма при этом рассматривается более простая система уравнений Максвелла: электродинамика имеет дело с одним вектор-потенциалом, а не с четырьмя (не с тетрадой), как гравитация, – ведь фотон имеет спин 1, а не 2, как гравитон, и источник здесь – вектор тока, а не тензор энергии-импульса с его плотностью материи и тремя давлениями (заметим: свёрткой по одному индексу с тетрадой ТЭИ можно превратить в четвёрку векторных полей, а свёрткой по обоим индексам – в десятку скалярных полей, изменяемых лоренцевыми вращениями тетрады, но не зависящих от изменения нумерации инвариантных мировых точек координатными преобразованиями). Но каждое тетрадное поле локализует гравитационную энергию, и проблема её нелокализуемости на языке метрики переходит в проблему неоднозначности выбора тетрадного поля для одного и того же поля метрического тензора: 6 параметров лоренцевых вращений (их задаёт антисимметричная 4×4 матрица) метрику не меняет. Что касается метрики как скалярного произведения векторов касательного расслоения пространства-времени, то придание значения её различному виду в разных координатах связано просто с различным способом нумерации одних и тех же мировых точек одного и того же искривлённого пространства-времени и с приданием, по сути, физического смысла координатным реперам. Например, постоянная метрика Минковского отличается от непостоянной плоской метрики Риндлера (диагональная матрица) тетрадой, отвечающей дифференциалам уже не декартовых, а полярных координат в координатной псевдоевклидовой плоскости. В мире искривлённом произвольное единичное смещение многообразия событий (по известной теореме Дарбу) может быть записано не через одну функцию (через её дифференциал), но через четыре функции (два дифференциала с функциональными коэффициентами), а дифференциалы четырёх координатных функций в разложении векторов тетрады в координатном базисе – это единичные смещения только в числовом координатном пространстве. Неортонормированной четвёрке координатных векторов или ковекторов (дифференциалов координат) не следует придавать физического смысла, поскольку каждая теория имеет дело только с инвариантами этой теории, а они в теории тяготения Эйнштейна определяются именно независимостью от способа нумерации мировых точек и приращений этих номеров при переходе от одной инвариантной точки к другой. Иначе говоря, нужны физически значимые величины смещений, и тетрада их и даёт в малой окрестности каждого наблюдателя – как вдоль его пространства, так и вдоль его мировой линии времени, длина дуги которой (вторичная сущность) по определению отождествляется с показаниями его стандартных часов (первичная сущность), отмеряющих собственное время этого наблюдателя. *Тетрадное поле $e^a_\mu(x)$ общей теории относительности есть локализация постоянной декартовой тетрады $e^a_\mu(x) = \delta^a_\mu$ (образующей единичную матрицу) мира Минковского специальной теории относительности с тетрадой из дииференциалов dx^μ декартовых координат x^μ.* Соответственно, скажем, гамильтониан следует считать оператором смещения вдоль временной монады. Тогда калибровочное гравитационное поле есть известная 1-форма спинорной связности $\omega_{\mu ab}$ [1] (вариация тензора материи по ней даёт в теории Эйнштейна–Картана тензор спина материи), задающая тензор кривизны $R_{\mu\nu ab}$.

Метрика в отдельной точке не имеет физического смысла, но его имеет риманова кривизна в этой точке, которую можно получить только измерениями секционной римановой кривизны вдоль различных двухмерных направлений в результате, скажем, измерения суммы углов различных треугольников (выполненных, скажем, с использованием часов и линеек или лучей лазеров), что требует перехода от одной мировой точки к её дифференциальной окрестности второго порядка. В плоском мире все 2-направления равноправны, а в неоднородно искривлённом мире имеем 2-направления экстремальной секционной римановой кривизны, и это позволяет связать с ними единственную преимущественную тетраду, определяющую и дифференциальную окрестность первого порядка наблюдателя, то есть и состояние его движения, что позволяет придать физический смысл плотности гравитационной энергии, связанной не с относительными ускорениями свободного падения для различных наблюдателей, но с кривизной мировых линий отдельных наблюдателей. Для островной системы физический смысл гравитационной энергии получается, повторяем, только при своего рода возврате в окрестности пространственной бесконечности от общей теории относительности к специальной теории относительности с её физически значимыми координатами, не требующими различения понятий системы координат и системы отсчёта как инвариантной, не зависящей от выбора координат, дополнительной структуры. Иначе говоря, без дополнения потерявших инвариантный физический смысл координатных индексов индексами лоренцевыми естественно решить проблему гравитационной энергии в общем случае нельзя (вспомним, что у псевдотензоров гравитационного поля Эйнштейна [6] и Ландау и Лифшица [7] оба индекса – координатные). Ведь в общем случае риманово пространство – это пространство со структурой, не имеющее изометрий (сохраняющих метрику движений, автоморфизмов), то есть не имеющее векторов Киллинга и в этом смысле не вписывающееся в идеологию знаменитой Эрлангенской программы Клейна с её инвариантами автоморфизмов. Если же мы хотим найти интегральный эквивалент равной нулю ковариантной дивергенции тензора Эйнштейна (свёрнутые тождества Бьянки) или Вейля (несвёрнутые тождества в случае риччи-плоских пространств), то придётся в теории Эйнштейна переходить к обобщению формулировки самих законов сохранения и вводить нелокальные интегральные законы сохранения с их интегралами под знаком интеграла [8]. Ниже мы впервые приведём пример такого обобщения для тензора материи общего положения в теории Эйнштейна–Картана.

И электродинамика, и гравитация имеют дело с удлинением частной производной до производной ковариантной (она переводит спинор в уравнении Дирака для электрона в спинор, а тензор как однородно преобразующийся геометрический объект в римановом пространстве-времени снова в тензор). Переход от частной производной к ковариантной возникает из-за локализации динамических групп симметрии и вводит компенсирующие калибровочные поля, объясняющие физические взаимодействия [9]. Но если в электродинамике частная производная удлиняется с помощью однородно преобразующегося и однозначно определяемого (с точностью до известного одномерного градиентного преобразования, не изменяющего электромагнитного тензора) вектор-потенциала, то в гравитации – с помощью сорока символов Кристоффеля и двадцати четырёх компонент спиновой связности [1] (эквивалентных двенадцати комплексным коэффициентам спиновой связности Пенроуза в рамках его спинорного подхода к гравитации [4]). При этом связность в теории Эйнштейна преобразуется неоднородно при преобразовании координат (в виде символов Кристоффеля) и при сохраняющих метрику лоренцевых вращениях тетрады (эти неоднородности взаимосвязаны условием абсолютного по определению параллелизма тетрадного поля). Вот эта неоднородность преобразования гравитационной связности, определяющей с помощью ковариантной производной параллельный перенос векторов и тензоров в искривлённом пространстве-времени, и выступает как проблема нелокализуемости энергии в теории гравитации Эйнштейна. Действительно, в силу принципа эквивалентности Эйнштейна (*гравитация и инерция локально эквивалентны)* в свободно падающем лифте Эйнштейна на Земле плотность гравитационной энергии в системе лифта обращается в нуль, а в ускоренно поднимаемом лифте в мире Минковского она в системе отсчёта лифта отлична от нуля и равна с минусом квадрату ускорения свободного падения пробной частицы (делённому на $8\pi G$, где G – постоянная тяготения Ньютона), как того требует в системе Земли квазиньютоново приближение теории тяготения Эйнштейна. Принцип эквивалентности Эйнштейна позволяет для одиночного наблюдателя уничтожить плотность гравитационной энергии в искривлённом мире и создать её в мире плоском. Например, для свободно падающих наблюдателей к единому для них центру Земли гравитация будет проявляться только в том, что мировые линии (с нулевой кривизной, геодезические) этих наблюдателей (до удара о поверхность Земли) будут сближаться (в дифференциальной геометрии уравнение девиации геодезических Якоби в римановом пространстве известно ещё с 19-го века).

Необходимость ввести укороченный гравитационный лагранжиан была обоснована Хокингом [10] (см. также [11]). Л. Д. Фаддеев был также вынужден выбрать укороченный (на дивергенцию) гравитационный лагранжиан в связи с тем, что лагранжиан Гильберта–Эйнштейна ($\sqrt{-g}R$, скаляр кривизны Риччи, умноженный на корень из определителя 4-метрики) в окрестности пространственной бесконечности имеет асимптотику $O(1/r^3)$ для асимптотически евклидова расстояния r до компактной системы материальных источников (которую с точки зрения бесконечности можно вообще считать бесконечно малым физическим 3-объёмом) и при интегрировании может дать расходящуюся величину, тогда как укороченный лагранжиан имеет нужную асимптотику $O(1/r^4)$, отвечающую ньютонову хвосту гравитационного поля и дающую положительную конечную величину полной энергии гравитирующей островной системы (удивительно, что при этом более быстро убывающее в пространственных направлениях гравитационное поле тривиально, мир – плоский). Указанная асимптотика сохраняется при допустимых преобразованиях координат, переводящих преобразованиями группы Пуанкаре асимптотически инерциальную систему отсчёта в асимптотически инерциальную. При этом динамическая группа теории тяготения не отличается от динамической группы любой другой релятивистской динамической системы, и существуют все интегралы движения релятивистской системы, включая энергию и импульс. Определение полной энергии с помощью известных псевдотензоров гравитационного поля Эйнштейна и Ландау–Лифшица в этом случае оказывается корректным. Таков важный итог рассмотрения проблемы гравитационной энергии в теории тяготения Эйнштейна в работе [1].

В настойщей работе предлагается дальнейшее продвижение, которое заключается, как уже было сказано, в обобщении подхода для произвольного тетрадного поля, задающего метрику и эволюцию различных 3-объёмов в трансверсальных им 1-направлениях числом четыре (например, для эволюции 3-объёма пространства вдоль временной монады). Указанный 3-объём при этом заметает мировую трубку, и для её сечений сохраняются соответствующие интегральные величины (для островной системы эта трубка может иметь бесконечный 3-объём пространственного сечения). Это достигается предложенной нами ранее концепцией сохраняющихся произвольных тетрадных токов для теории тяготения Эйнштейна в тетрадной форме (один индекс тензора материи лоренцев и один – координатный) [2, 3]. Освобождение одного индекса от зависимости от координатных преобразований превращает ковариантные дивергенции, по сути, в дивергенции частные, допускающие применение теоремы Стокса для получения сохраняющихся интегральных величин. Здесь этот подход обобщён для теории Эйнштейна–Картана, изложенной ранее в пионерских работах [12–14]. Если для островной физической системы в [1] была выбрана, по сути, единственная исходная система отсчёта, сопутствующая (с точки зрения удалённого наблюдателя) материальному источнику, то в общем случае нами предложена единственная тетрада, обеспечивающая выполнение несвёрнутых тождеств Бьянки для тензора кривизны Римана с двумя координатными и двумя лоренцевыми индексами (ведь именно такой тензор Римана необходимо возникает в описании полей Дирака в искривлённом пространстве-времени для спинорной материи на неизбежном здесь языке тетрадного репера и спинорной связности [1]).

Заметим, что впервые понимание системы отсчёта как дополнительной инвариантной структуры на пространственно-временном многообразии событий предложено

А. Л. Зельмановым [15–17] – он понимал систему отсчёта как поле монады и интегральное для неё семейство линий времени, задающих состояние движения наблюдателей и проекцию мировых величин на их приборы. Само по себе 1+3 расщепление мира событий – вещь элементарная, но не элементарным было расщепление различных дифференциальных операторов и запись с их помощью полевых уравнений на языке наблюдаемых. Физическим пространством при этом является поле ортогональных линиям времени гиперплоскостей (состоящих из одновременных для данных наблюдателей событий), не имеющих в общем случае огибающих их интегральных гиперповерхностей, в результате чего, например, для уравнений Максвелла появляются эффективные магнитные заряды, пропорциональные напряжённости магнитного поля и угловой скорости вращения системы отсчёта. Но найти монадный (на языке координат – хронометрически инвариантный) псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля общего вида А. Л. Зельманов не успел, заявив (в 1973 году) о его поиске в тезисах [18] и в докторской диссертации 1982 года (ГАИШ МГУ).

Перейдём к формулам. Для начала нам потребуется кратко напомнить формализм внешних форм [19, 20]. Форма α степени p на n-многообразии есть тензор с нижними антисимметричными p индексами. Функция есть 0-форма. Внешний дифференциал $d\alpha$ есть альтернированная частная производная (и $dd = 0$), то есть форма степени $p + 1$. Например, для функции $df = \partial_\mu f \cdot dx^\mu$, а если $A = A_\mu dx^\mu$ есть ковектор-потенциал, то $dA = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)dx^\mu \wedge dx^\nu$ (здесь $\wedge$ – известный знак внешнего умножения форм) есть электромагнитный тензор. Оператор дуального сопряжения Ходжа $*$ (при этом $** = \pm 1$, где знак зависит от знака определителя метрики и чётности числа $p(n - p)$ или его нечётности) переводит p-форму в (n-p)-форму свёрткой (с применением метрики) формы с $\sqrt{-g}\epsilon$, где ϵ – постоянный символ Леви–Чивиты $\epsilon_{\mu \ldots \nu}$ (так что, скажем, $*1 = \sqrt{-g}d^n x$ есть форма n-объёма). Оператор кодифференциала $\delta = *^{-1}d*$ переводит p-форму в $(p - 1)$-форму в виде частной ковариантной дивергенции (со знаком минус) формы по первому индексу. Лапласиан $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta+\delta d$ метрически самосопряжён: для скалярного произведения форм одной степени (иначе оно равно нулю) на компактном многообразии $(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge *\beta$ получаем $(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$ (во второй скобке равные степени обеих перемножаемых форм на единицу меньше, чем в первой). Действие лапласиана на p-форму даёт даламбертиан $(-\nabla^2 = -\nabla_\mu \nabla^\mu)$ формы и в общем случае ещё ряд членов с тензорами Риччи и Римана. Тетрада есть четвёрка 1-форм (так что лапласиан тетрады содержит даламбертиан и ещё только один член – с тензором Риччи). При выражении тензора Риччи через тензор материи (ТЭИ) получаются уравнения, эквивалентные уравнениям Эйнштейна. При действии лапласиана на (ко)вектор-потенциал получаем на римановом пространстве-времени уравнения Максвелла в форме [21]:

$$(\Delta A)_\mu \equiv -\bigtriangledown_\nu \bigtriangledown^\nu A_\mu + R^\nu_\mu A_\nu = 4\pi J_\mu. \tag{1}$$

В результате получаем закон сохранения тока J в нормальной дифференциальной форме:

$$\partial_\lambda[\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}(4\pi J_\mu + \partial_\mu \bigtriangledown^\nu A_\nu - R^\nu_\mu A_\nu)] = 0. \tag{2}$$

В риччи-плоском мире ($R_{\mu\nu} = 0$) для физически оправданной лоренцевой калибровки ковектор-потенциала $\delta A = -\bigtriangledown^\mu A_\mu = 0$ ток $J = J_\mu dx^\mu$ сохраняется без добавок (корень из определителя метрики $\sqrt{-g}$ при этом даёт правильное интегрирование по объёму, изменение которого здесь тоже учитывается). Для тетрады $e_a = e_{a\mu}dx^\mu$ получаем аналогичное уравнение Эйнштейна с сохраняющимся тетрадным током $S_a = S_{a\mu}dx^\mu$ (ниже свёрнутый с тетрадой тензор энергии-импульса материи $T_a = T_{\mu\nu}e^\mu_a dx^\nu$, $T = T_{a\mu}e^{a\mu)}$):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \Longleftrightarrow G_a \equiv R_a - (1/2)Re_a = 8\pi T_a \Longleftrightarrow R_a = 8\pi[T_a - (1/2)Te_a] \Longleftrightarrow \delta de_a = 8\pi S_a.$$

$$S_a = T_a - (1/2)Te_a + (8\pi)^{-1}(d\bigtriangledown^\mu e_{a\mu} - \bigtriangledown^2 e_a), \tag{3}$$
$$\partial_\mu(\sqrt{-g}S^\mu_a) = 0.$$

И электромагнитный тензор, и тетрадный ток не изменяются при добавлении к потенциалам градиентов функций, к которым их можно свести в случае тривиальных полей (одномерная векторная гравитация не отличалась бы от теории электромагнетизма). Для лоренцевой калибровки тетрады и тока с двумя лоренцевыми индексами все вторые производные тетрады, входящие в ток, сводятся к выражению, квадратичному по первым производным. Как легко убедиться, для мира Шварцшильда в жёсткой системе отсчёта отрицательная квазиньютонова потенциальная гравитационная энергия компенсирует половину положительной массы источника, для слабых гравитационных волн на плоском фоне получаем обычную положительно определённую плотность их энергии, и так далее. Заметим, что действующий на тетраду оператор Лапласа сам зависит от задаваемой тетрадой метрики, так что без решения уравнений Эйнштейна для метрики не обойтись. Но для решения проблемы законов сохранения в гравитации в общем случае нужна именно тетрада. При этом поиск тока как кодифференциала дифференциала тетрады очень прост. А преимущественную (риман-каноническую или просто каноническую) тетраду можно найти из условий экстремумов секционных римановых кривизн $R_{abab} = R_{\mu\nu\alpha\beta}e^\mu_a e^\nu_b e^\alpha_a e^\beta_b$, что накладывает 6 ограничений на выбор тетрады и в общем случае фиксирует ее однозначно приравниванием нулю вариации секционной кривизны при малых (постоянных в каждой мировой точке) лоренцевых преобразованиях $\beta\omega^b_a$ задающего 2-направление бивектора $(e^\mu_a e^\nu_b - e^\nu_a e^\mu_b)$ как ядра 2-формы $e_a \wedge e_b$ (имеем шесть уравнений 4-й степени для неизвестных 16-ти компонент тетрады, из которых 10 связаны условием задания известной метрики, так что остается только 6 степеней свободы лоренцевых вращений, которые и ищутся):

$$e^\mu_a \to e^\mu_a + \delta e^\mu_a = e^\mu_a + \delta\omega^b_a e^\mu_b \Longrightarrow \delta R_{abab} = 2(R_{abcb}\delta\omega^c_a + R_{abac}\delta\omega^c_b) = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu} * R_{\nu\lambda ab}) = 0.$$

Каноническая тетрада определяет каноническую форму спинорной связности,

$$\omega_{\mu ab} = \frac{1}{2}e^\nu_a(\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - \frac{1}{2}e^\nu_b(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) - \frac{1}{2}e^\lambda_a e^\rho_b(\partial_\lambda e_{c\rho} - \partial_\rho e_{c\lambda})e^c_\mu, \quad (5)$$

которая вместе с символами Кристоффеля участвует в известном определении абсолютного параллелизма для тетрадного поля:

$$D_\mu e^a_\nu = \nabla_\mu e^a_\nu + \omega^a_{\mu b}e^b_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}e^a_\lambda + \omega^a_{\mu b}e^b_\nu = 0. \quad (6)$$

Теория тяготения Эйнштейна оказывается результатом полной локализации действия группы Пуанкаре, где нет ни сохраняющих тетрадное поле параллельных переносов, ни сохраняющих секционные кривизны непрерывных лоренцевых вращений. При обобщении теории Эйнштейна до теории Эйнштейна–Картана появляется тензор кручения Q как антисимметричная часть коэффициентов связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, тензор Риччи становится несимметричным, и число уравнений тяготения с 10-ти увеличивается до 16-ти. При этом для тензора Римана пространства Римана–Картана существует каноническое соответствие с тензором Римана (с чертой) прежнего пространства Римана:

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho + \nabla_{[\mu}Q_{\nu]\lambda}{}^\rho - (Q_{\sigma[\mu}{}^\rho Q_{\nu]\lambda}{}^\sigma + Q_{\mu\nu}{}^\sigma Q_{\sigma\lambda}{}^\rho). \quad (7)$$

Для этого прежнего тензора кривизны имеем каноническую тетраду и можем получить 4 нелокальных интегральных законов сохранения для тензора Эйнштейна и равного ему и в общем случае диагонализуемого тензора материи $T_a = -p_a e_a$ (знак выбран так, чтобы для плотности материи иметь $T_{00} > 0$ при сигнатуре метрики $(-+++)$). Возникающий в тождестве $e^\mu_a \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ с частной производной дополнительный член можно представить, как производную Ли от интеграла с переменным верхним пределом вдоль собственного вектора $e^{\mu}_{a}\partial_{\mu}$ с длиной дуги векторной линии s_a. Трансверсальный этим линиям 3-объём $\Sigma_a(0)$ заметает вдоль них мировую трубку с эквидистантными сечениями $\Sigma_a(s_a)$. С помощью единичного оператора логарифма одномерной интегральной экспоненты можно сумму двух производных Ли объединить в одну и получить сохранение интеграла по 3-объёмам сечений от выражения с интегральной экспонентой, то есть нелокальный интегральный закон сохранения [8]. Здесь мы практически впервые приведём его с добавочными членами тензора спина $S_{\mu\nu\lambda}$ для пространства Римана–Картана:

$$\int_{\Sigma_a(s_a)} *e_a p_a \exp \int_0^{s_a} [p_a^{-1} p^b K_{abb} + (4\pi G p_a^{-1}) \sqrt{h_a} S_a^{\mu\nu} (\nabla^{\rho} S_{\mu\nu\rho} + 4\pi G S^{\rho}_{\lambda\rho} S^{\lambda}_{\mu\nu})] ds = \text{const}. \quad (8)$$

Выше $*e_a = \sqrt{h_a} d^3x$ есть 3-объём с корнем из модуля определителя 3-метрики. Без тензора спина и (описывающей фокусирование) второй фундаментальной формы с минусом K_{abb} для ортогональных e_a площадок (при этом $K_{aaa} = 0$) получили бы, например, просто сохранение массы 3-объёма материи. Но в системе центра масс облака частиц при сохранении их числа их общая масса движения изменяется при деформации (скажем, при гравитационной конденсации материи) 3-объёма: гравитация работает! Торсионное поле Картана даёт очень малый вклад спинов материальных источников: если материю от геометрии отделяет постоянная тяготения Эйнштейна как малый множитель, то вклады спина идут с её квадратом и кубом. Но в ранней Вселенной высокие плотности, скорости и отталкивательный потенциал спина меняют ситуацию. Если выбор тетрады подчинить четвёрке условий $\nabla^{\mu} T_{a\mu} = 0$ (для мира де Ситтера, например, это означает просто лоренцеву калибровку тетрады), то нелокальный интегральный закон сохранения станет локальным интегральным законом сохранения, но эта тетрада в общем случае уже не будет для ТЭИ собственной (риччи-канонической). Напомним важную гипотезу математика А. М. Виноградова [22]: *регулярная система уравнений в частных производных имеет полный набор нелокальных интегральных законов сохранения.* Поскольку все сильные физические поля гравитируют, а на языке собственных тетрад их физика может быть яснее, концепцию законов сохранения стоит обобщить на случай нелокальности как физических полей, так и их законов сохранения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Л. Д. Фаддеев, Успехи физических наук **136**, 435 (1982).

[2] R. F. Polishchuk, "Energy-Momentum Problem in General Relativity," in *Abstracts of the 14th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR-14), 6-12 August 1995, Florence, Italy*, Ed. by M. Francaviglia et al. (Florence, 1995), pp. A130, D39.
[3] R. F. Polishchuk, Gravitation and Cosmology **2**, 3(7), 244 (1996).
[4] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time, Vol. 1-2*, (Cambridge University Press, 1986).
[5] E. Witten, Comm. Math. Phys., **80**, 381 (1981).
[6] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 448 (1918).
[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973), с. 358.
[8] Р. Ф. Полищук, *Фундаментальные физические взаимодействия и законы сохранения.* Научный альманах "Гордон", (М., ООО "Гордон", 2003), том 1, стр. 67.
[9] В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля* (М., Эдиториал УРСС, 1999).
[10] S. W. Hawking, *The path integral approach in Quantum gravity.* In: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, (Cambridge University Press, 1979).
[11] R. F. Polishchuk, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **35**(9), 264 (2008).
[12] E. C. Cartan, Acad. Sci. Paris **174**, 593 (1922).
[13] T. W. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).
[14] D. W. Sciama, *Recent Developments in General Relativity* (Oxford, Pergamon Press, 1962).
[15] А. Л. Зельманов, ДАН СССР **107**, 815 (1956).
[16] А. Л. Зельманов, ДАН СССР **124**, 1030 (1959).
[17] А. Л. Зельманов, ДАН СССР **209**, 822 (1973).
[18] А. Л. Зельманов, В. А. Твердохлебова, в: *Тезисы докладов на Всесоюзном симпозиуме по новейшим проблемам гравитации* (Менделеево, ВНИИФТРИ, 1973), стр. 76.
[19] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия* (М., ИЛ, 1956).
[20] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия* (М., Наука, 1986).
[21] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация.* В 3-х томах. Т.2, (М., Мир, 1977), с. 224.
[22] *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. (М., Наука, 1997).

Поступила в редакцию 27 августа 2013 г., в переработанном виде 11 июня 2014 г.