

УДК 551.466:534.1

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНОГО СОЛИТОНА НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ

М. А. Шерменева

Рассмотрена эволюция солитона на водной поверхности в случае наклонного дна в рамках приближения мелкой воды. Для получения линейного решения использован метод функции Римана. Показано, что нелинейные поправки 2-го, 3-го и 4-го порядка выражаются через производные функции, определяющей линейное решение. Полученное решение может быть применено к описанию распространения волн цунами в прибрежной зоне.

Ключевые слова: солитоны, уравнения Буссинеска, нелинейные волны в прибрежной зоне.

1. *Введение.* Впервые открытые и описанные в 1834 году Д.С. Расселом, солитонные возмущения изучаются на протяжении более чем ста лет, однако их моделирование до сих пор актуально, т.к., например, большинство волн цунами, представляющих опасность и наносящих ущерб, имеют именно солитонное происхождение [1, 2]. Уравнение, описывающее уединенную волну, было впервые выведено в 1895 году Д.И. Кортевегом и Г. де Фризом. Общее решение КдФ-уравнения было получено в 1967 году в [3], что положило начало бурному развитию науки о солитонах. Позднее были получены другие нелинейные уравнения, имеющие солитонные решения: уравнение синус-Гордона и нелинейное уравнение Шредингера, а также различные варианты уравнений Буссинеска [4–6].

Настоящая работа посвящена приближенному аналитическому описанию движения солитона в прибрежной зоне для случая наклонного дна на основе уравнения Буссинеска второго порядка. Волны, бегущие к наклонному берегу, удовлетворяют нелинейным уравнениям мелкой воды потенциала скоростей и функции возвышения свободной поверхности [7]. Как было показано в [8–11], эта система может быть сведена к одному уравнению класса Буссинеска для потенциала скоростей на дне, у которого есть

ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: shermeneva@mail.ru;
НИЯУ МИФИ, 115409 Россия, Москва, Каширское ш., 31.

только две независимые переменные – пространственная координата и время (x, t) . Для получения в явном виде формул, описывающих линейное решение солитонного типа, используется метод функции Римана. Далее показано что, если найдено произвольное линейное решение $q(x, t)$ уравнения, то квадратичные, кубические, и квартичные нелинейные поправки могут быть получены в форме полиномов от временных и пространственных производных функции $q(x, t)$. Метод позволяет решать задачу Коши с произвольной начальной функцией потенциала. Предполагается, что построенные выражения – только первые четыре члена ряда, определяющего точное решение уравнения мелкой воды. Далее эта техника применяется в случае начальных данных солитонного типа. В конце дан пример солитона над наклонным дном, который демонстрирует сходимость последовательных приближений.

2. *Основные уравнения.* Движение волны описывается потенциалом скоростей $\phi(x, z, t)$ и поверхностным возвышением $\eta(x, t)$. На невозмущённой поверхности воды $z = 0$. Безразмерные координаты вводятся следующим образом:

$$x = x'/l_0, \quad z = z'/h_0, \quad t = (g^{1/2}h_0^{1/2}/l_0)t', \quad \eta = \eta'/a_0, \quad h = h'/h_0, \quad \phi = (h_0^{1/2}/(g^{1/2}a_0l_0))\phi',$$

где штрихи обозначают физические переменные; a_0 и l_0 , обозначают характерную амплитуду волны и длину волны на глубине h_0 , и g – ускорение силы тяжести. Безразмерные уравнения и граничные условия для безвихревого волнового движения записываются следующим образом (см. [7]):

$$\mu^2 \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad -h(x) < z < \eta(x, t), \quad (2.1)$$

$$\eta_t + \varepsilon \eta_x \phi_x - \mu^{-2} \phi_z = 0, \quad z = \varepsilon \eta(x, t), \quad (2.2)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \varepsilon (\phi_x^2 + \mu^{-2} \phi_z^2) + \eta = 0, \quad z = \varepsilon \eta(x, t), \quad (2.3)$$

$$\phi_z = -\mu^2 h_x \phi_x, \quad z = -h(x). \quad (2.4)$$

Здесь $z = -h(x) \equiv -sx$ – линейная функция, определяющая профиль дна, ε – мера нелинейности и μ – дисперсия частоты, определенные как $\varepsilon = a_0/h_0$ и $\mu = h_0/l_0$. Сначала предполагается малым только μ , в то время как ε оставляется произвольным. Далее, следуя [8–11], путем разложения потенциала $\phi(x, z, t)$ по вертикальной координате и исключения $\eta(x, t)$, получаем единственное уравнение для потенциала на дне $f(x, t)$:

$$-f_{tt} + sf_x + sx f_{xx} - \varepsilon (f_t f_{xx} + 2f_{tx} f_x) - \varepsilon^2 \frac{3}{2} f_x^2 f_{xx} = 0, \quad (2.5)$$

которое является предметом данного исследования. Решения линейной версии этого уравнения

$$-f_{tt} + sf_x + sxf_{xx} = 0 \quad (2.6)$$

будут использоваться как блоки для построения приближенных нелинейных решений.

3. *Линейные решения.* Существуют различные подходы к решению линейного уравнения (2.6). Самый простой вид решений – периодические волны, бегущие к берегу

$$q(x, t) = aJ_0(\omega s^{-1/2}x^{-1/2}) \sin \omega t + bY_0(\omega s^{-1/2}x^{-1/2}) \cos \omega t \quad (3.1)$$

и их линейные комбинации

$$q(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i J_0(\omega_i s^{-1/2}x^{-1/2}) \sin \omega_i t + b_i Y_0(\omega_i s^{-1/2}x^{-1/2}) \cos \omega_i t. \quad (3.2)$$

Рассмотрим выражение (3.2) и его временную производную в $t = 0$

$$q(x, 0) = \sum_{i=1}^n b_i Y_0(\omega_i s^{-1/2}x^{-1/2}), \quad (3.3)$$

$$q_t(x, 0) = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i J_0(\omega_i s^{-1/2}x^{-1/2}). \quad (3.4)$$

Варьируя коэффициенты a_i и b_i , и используя разложение Фурье–Бесселя, выражениями (3.3) и (3.4) можно аппроксимировать широкий класс начальных функций для уравнения потенциала. Нелинейное решение, полученное из (3.1), было проанализировано в [8,9]. В этих работах был рассмотрен некоторый специальный случай применения указанного подхода и выполнено сравнение его с решением, полученным Кариа и Гринспеном [12]. Однако приближение (3.3)–(3.4) плохо аппроксимирует начальные данные солитонного типа. В настоящей работе предлагается решение задачи Коши для линейного уравнения мелкой воды (2.6) методом функции Римана. Детальное описание этого метода может быть найдено в книгах [13, 14], а формула (3.9) (см. ниже), выражающая решение задачи Коши, может быть проверена подстановкой в (2.6). Задача Коши для уравнения (2.6) записывается следующим образом

$$f(x, t)|_{t=0} = F_0(x); \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)|_{t=0} = F_1(x). \quad (3.5)$$

Вводя новые переменные

$$\tau = t/2 + s^{1/2}x^{1/2}, \quad \varsigma = t/2 - s^{1/2}x^{1/2} \quad (3.6)$$

и новую функцию $\nu(\tau, \varsigma) = \sqrt{\tau - \varsigma} f(x, t)$, уравнение (2.6) можно преобразовывать в следующую каноническую форму:

$$\nu_{\tau\varsigma} - \frac{1}{4}(\tau - \varsigma)^{-2}\nu = 0. \quad (3.7)$$

Функция $R(\tau, \varsigma, \tau_0, \varsigma_0)$ Римана для уравнения (3.7) – это гипергеометрическая функция

$$R(\sigma) = G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sigma^2 + \dots, \quad (3.8)$$

где $\sigma = \frac{(\tau - \tau_0)(\varsigma - \varsigma_0)}{(\tau_0 - \varsigma_0)(\tau - \varsigma)}$.

Тогда эволюция начальных данных может быть записана в квадратурах следующим образом

$$f(x, t) = \frac{1}{2}s^{-1/4}x^{-1/4} [\sqrt{-\varsigma}F_0(\varsigma^2) + \sqrt{\tau}F_0(\tau^2)] + s^{-1/4}x^{-1/4} \int_{-\varsigma}^{\tau} G(\hat{\sigma})\xi^{1/2}F_1(\xi^2)d\xi + s^{-1/4}x^{-1/4}t \int_{-\varsigma}^{\tau} G'(\hat{\sigma})\xi^{-1/2}F_0(\xi^2)d\xi, \quad (3.9)$$

где $\hat{\sigma} = \frac{t^2 - 4(s^{-1/2}x^{1/2} - \xi)^2}{16s^{-1/2}x^{1/2}\xi}$.

Эти формулы будут использованы для вычисления эволюции солитона в разделе 5.

4. *Нелинейные поправки.* Предположим, что функция $q(x, t)$ – точное решение линейного уравнения (2.6). Обозначим

$$q_i = \frac{\partial^i q}{\partial x^i}, \quad p_i = \frac{\partial^i q}{\partial x^{i-1} \partial t}. \quad (4.1)$$

Мы ищем приближенное решение порядка m в форме однородного полинома (степени m) от

$$q_0, \dots, q_m, p_0, \dots, p_{m-1}$$

чьи коэффициенты – полиномы от x с неизвестными числовыми коэффициентами. Тогда получаем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений для этих числовых коэффициентов. Они совместны, по крайней мере, для $m = 2, 3, 4$, что позволяет дать приближенные решения уравнения мелкой воды. В [11] были даны детальные вычисления для порядка ε и ε^2 , а для ε^3 была описана только схема вычислений. В явной форме выражение, удовлетворяющее уравнению мелкой воды с точностью ε^3 , имеет следующий вид:

$$q - \varepsilon s^{-1} q_x q_t + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} s^{-2} q_t^2 q_{xx} + \frac{1}{2} s^{-1} x q_x^2 q_{xx} + s^{-2} q_t q_x q_{xt} + \frac{1}{3} s^{-1} q_x^3 \right) +$$

$$+\varepsilon^3 \left[\begin{array}{l} -\frac{2}{3}s^{-2}q_x^3q_{xt} - s^{-3}q_tq_xq_{xt}^2 - \frac{3}{2}s^{-2}q_tq_x^2q_{xx} - \\ -(s^{-3}q_t^2 + s^{-2}xq_x^2)q_{xx}q_{xt} - s^{-2}xq_tq_xq_{xx}^2 - \\ -\left(\frac{1}{2}s^{-3}q_t^2q_x + \frac{1}{6}s^{-2}xq_x^3\right)q_{xxt} - \left(\frac{1}{6}s^{-3}q_t^3 + \frac{1}{2}s^{-2}xq_t^2q_x\right)q_{xxx} \end{array} \right]. \quad (4.2)$$

Правильность этого выражения может быть проверена подстановкой в (2.5).

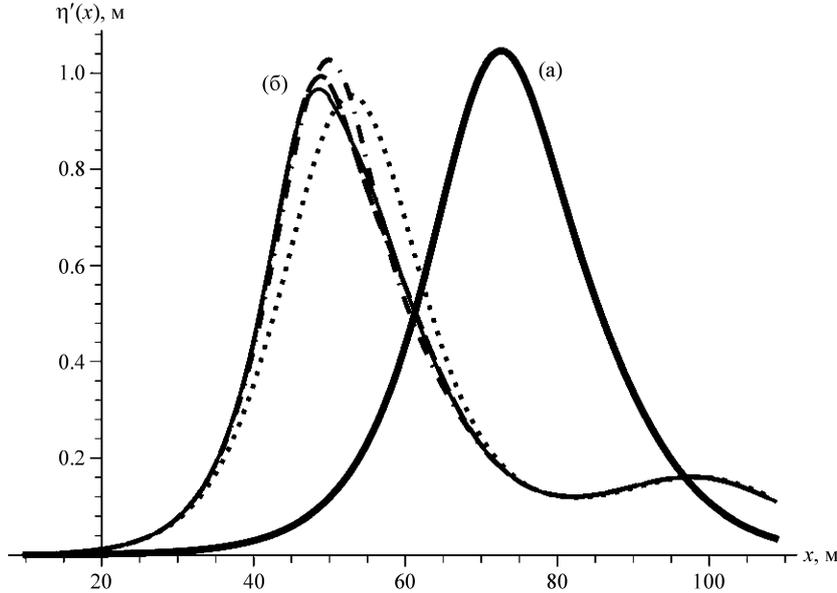


Рис. 1: График возвышения свободной поверхности для параметров; $s = 0.08$; $\varepsilon = 0.14$; $\mu = 0.1$; $a_0 = 1.0$ м; $l_0 = 60$ м на глубине $h_0 = 6$ м. (а) — солитонное возмущение свободной поверхности в начальный момент времени. (б) — форма солитона спустя $t = 5.4$ сек., первое (линейное) приближение — пунктирная линия, второе приближение — штрих-пунктирная линия, третье приближение — штриховая линия, четвертое приближение — сплошная линия.

5. Эволюция солитона. Предположим, что начальные данные соответствуют решению солитонного типа:

$$f(x, t)|_{t=0} = F_0(x) = A \tanh(k(-X + x)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)|_{t=0} = F_1(x) = B \operatorname{sech}^2(k(-X + x)),$$

где $A = -1.4014$; $B = -9.8$; $k = 6.3$; $X = 1.25$. Тогда

$$\eta_{\text{lin}}(x, t)|_{t=0} = C \operatorname{sech}^2(k(-X + x)),$$

где $C = -B/g = 1.0$. На рис. 1 показаны линейная эволюция солитонно-подобных начальных данных (а) и их нелинейные поправки для $t = 5.4$ сек. (б).

6. *Заключение.* В данной работе найдено решение задачи Коши для линейного уравнения мелкой воды методом функции Римана. Для этого решения показана схема построения приближенных нелинейных поправок. Решение было получено путем разложения потенциала скорости по степеням амплитуды волны. Первые четыре коэффициента этого ряда оказались полиномами от временных и пространственных производных функции, определяющей линейное решение. Полученное таким способом аналитическое решение может быть использовано для описания движения длинной волны солитонного типа на мелководье и вблизи береговой линии в случае наклонного дна.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами* (Н. Новгород, ИПФ РАН, 1996).
- [2] В. М. Галкин, Е. Н. Пелиновский, Тр. НГТУ **94**, 329 (2012).
- [3] С. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Phys. Rev. Lett. **19**, 1095 (1967).
- [4] P. A. Madsen, H. A. Schaffer, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **356**, 3123 (1998).
- [5] G. Wei, J. T. Kirby, S. T. Grilli and R. Subramanya, J. Fluid Mech. **294**, 71 (1995).
- [6] M. F. Gobby, J. T. Kirby and G. Wei, J. Fluid Mech. **405**, 181 (2000).
- [7] C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves* (New York, Wiley, 1983).
- [8] A. Shermenev, M. Shermeneva, Phys. Rev. E **61**, 6000 (2000).
- [9] A. Shermenev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **94**, 1 (2001).
- [10] М. А. Шерменева, И. В. Шуган, Письма в ЖТФ **32**(2), 33 (2006).
- [11] М. А. Shermeneva, Phys. Wave Phenom. **19**, 224 (2011).
- [12] G. F. Carrier, H. P. Greenspan, J. Fluid Mech. **4**, 97 (1958).
- [13] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (New York, Wiley-Interscience, 1989).
- [14] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations* (New York, Wiley, 1964).

Поступила в редакцию 19 февраля 2015 г.