

УДК 533.9.12:538.94

## О ВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИОГЕННОЙ ПЛАЗМЕ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Д. Н. Габышев, А. А. Рухадзе

*Исправлена идеологическая неточность, допущенная в работе [1] при вычислении потенциала взаимодействия двух электронов в криогенной плазме с вырожденными электронами. Полученная исправленная формула лишь количественно отличается от формулы (2.4), полученной в [1]. Качественный вывод, что обменное волновое взаимодействие электронов оказывается притягательным, сохраняется, меняется зависимость потенциала взаимодействия от расстояния между электронами.*

**Ключевые слова:** ионно-звуковая волна, волновое взаимодействие.

В работе [1] был вычислен потенциал обменного волнового взаимодействия электронов в криогенной плазме с вырожденными электронами. Волновое взаимодействие было обусловлено обменом ионно-звуковой волной, которая существует при выполнении условий существования такой волны

$$\varepsilon_F = \frac{m\nu_F^2}{2} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 n_e^{2/3}}{2m} \gg T_e \geq T_i,$$

$$\nu_F = \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{m}} \gg \frac{\omega}{k} \gg \nu_{Ti} = \sqrt{\frac{T_i}{M}}, \quad (1)$$

здесь  $m$  и  $T_e$  – масса электрона и температура (энергия) электронной компоненты плазмы, соответственно,  $M$  и  $T_i$  – масса иона и температура ионной компоненты, а  $\varepsilon_F$  и  $\nu_F$  – энергия Ферми электронов и их скорость в вырожденной электронной плазме,  $n_e$  – концентрация электронов,  $\omega/k$  – фазовая скорость волны,  $\nu_{Ti}$  – скорость ионов плазмы.

Потенциальная энергия взаимодействия двух электронов в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$  определяется выражением [2]

$$U(\vec{r}) = \frac{4\pi e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2 \varepsilon(\vec{k}, \vec{v}, \vec{k})} d^3 k, \quad (2)$$

где  $\vec{r}$  – расстояние между электронами, а  $\vec{v}$  – скорость их относительного движения. В дальнейшем один электрон будет считаться покоящимся, а второй движущимся со скоростью  $\vec{v}$  относительно него. Величина  $\varepsilon(\omega, \vec{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k})$  – эффективная продольная диэлектрическая проницаемость.

В работе [1] было использовано выражение для  $\varepsilon(\omega, k)$ , соответствующее начальной задаче развития в плазме ионно-звуковых колебаний, т.е. с учетом мнимой части диэлектрической проницаемости [2]:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{k \nu_F} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{8 \nu_{ii} k^2 \nu_{Ti}^2}{5 \omega^3} \right),$$

где  $\nu_{ii} = \frac{4\sqrt{\pi} e^4 n_i L}{3\sqrt{M T_i^{3/2}}}$  – частота ион-ионных столкновений,  $L$  – кулоновский логарифм.

Здесь ленгмюровская частота ионов равна  $\omega_{Li} = \sqrt{4\pi e^2 n_i / M}$ , а дебаевский радиус для электронов с ленгмюровской частотой  $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m}$  равен  $r_D = \nu_F / \omega_{Le} \sqrt{3}$ . При рассмотрении же стационарной задачи следует пользоваться выражением для  $\varepsilon(\omega, k)$  без мнимой части [3]:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \quad (3)$$

При вычислении (2) с учетом (3) несобственный интеграл вычисляется в смысле главного значения, как это делается при исследовании ионно-звуковой турбулентности [4].

Подставляя (3) в формулу (2), получаем

$$U(r) = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1/r_D^2} \left[ \int_{-1}^{+1} e^{ikrx} \left( 1 + \frac{x_0^2}{x^2 - x_0^2} \right) dx \right] dk, \quad (4)$$

здесь  $x_0^2 = \frac{a^2}{1 + k^2 r_D^2} = \frac{a^2 r^2 / r_D^2}{r^2 k^2 + r^2 / r_D^2}$ ,  $a^2 = \frac{m}{3M}$ . Поскольку в плазме  $a \ll 1$ , то  $x_0 \ll 1$ .

После несложных вычислений из (4) получаем

$$U(r) = U_1(r) + U_2(r),$$

$$U_1(r) = \frac{e^2}{r} e^{-r/r_D}, \quad U_2(r) = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{k^2 + \frac{1}{r_D^2}} \left[ \int_0^1 \frac{2e^{ikrx} x_0^2}{x^2 - x_0^2} dx \right] dk. \quad (5)$$

Используя подстановку  $u = kr$ ,

$$U_2(r) = \frac{e^2}{\pi r} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^2 + \frac{r^2}{r_D^2}} \left[ \int_0^1 \frac{2e^{iux} x_0^2}{x^2 - x_0^2} dx \right] du =$$

$$= \frac{e^2}{\pi r} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^2 + \frac{r^2}{r_D^2}} x_0 \left[ \int_0^1 \cos ux \left( \frac{1}{x - x_0} - \frac{1}{x + x_0} \right) dx \right] du, \quad (6)$$

вместе с тем  $x_0 = x_0(k)$ . Можно переписать часть  $U_2(r)$  потенциала  $U(r)$  в виде

$$U_2(r) = \frac{e^2 a}{\pi r_D} \int_0^{+\infty} u^2 \left( u^2 + \frac{r^2}{r_D^2} \right)^{-3/2} J(u) du, \quad (7)$$

$$J(u) = \int_0^1 \frac{\cos ux}{x - x_0} dx - \int_0^1 \frac{\cos ux}{x + x_0} dx = - \int_0^1 \frac{\cos ux}{x + x_0} dx + \int_0^{x_0 - \varepsilon} \frac{\cos ux}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^1 \frac{\cos ux}{x - x_0} dx,$$

здесь  $\varepsilon > 0$  – уже бесконечно малое положительное число. Аккуратные вычисления интегралов в смысле главного значения дают

$$J_1(u) = - \int_0^1 \frac{\cos ux}{x + x_0} dx = - \left( \cos ux_0 \int_{ux_0}^{(1+x_0)u} \frac{\cos z}{z} dz + \sin ux_0 \int_{ux_0}^{(1+x_0)u} \frac{\sin z}{z} dz \right),$$

$$J_2(u) = \int_0^{x_0 - \varepsilon} \frac{\cos ux}{x - x_0} dx = \cos ux_0 \int_{-ux_0}^{-\varepsilon u} \frac{\cos z}{z} dz - \sin ux_0 \int_{-ux_0}^{-\varepsilon u} \frac{\sin z}{z} dz,$$

$$J_3(u) = \int_{x_0 + \varepsilon}^1 \frac{\cos ux}{x - x_0} dx = \cos ux_0 \int_{\varepsilon u}^{(1-x_0)u} \frac{\cos z}{z} dz - \sin ux_0 \int_{\varepsilon u}^{(1-x_0)u} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Воспользовавшись свойствами четности и нечетности подынтегральных выражений в  $J_1(u)$ ,  $J_2(u)$  и  $J_3(u)$ , получаем функцию

$$J(u) = J_1 + J_2 + J_3 = - \left[ \cos ux_0 \int_{(1-x_0)u}^{(1+x_0)u} \frac{\cos z}{z} dz + \sin ux_0 \left( \int_{(1-x_0)u}^{(1+x_0)u} \frac{\sin z}{z} dz - 2 \int_{(1-x_0)u}^{\varepsilon u} \frac{\sin z}{z} dz \right) \right], \quad (8)$$

не содержащую особенностей при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поэтому в дальнейшем положим  $\varepsilon = 0$ . Интегралы, входящие в (8), задаются в классе специальных функций [5] и получили наименование интегральных синуса и косинуса. Поэтому (8) можно переписать в виде:

$$J(u) = \cos ux_0 \{Ci[(1 - x_0)u] - Ci[(1 + x_0)u]\} - \sin ux_0 \{Si[(1 - x_0)u] + Si[(1 + x_0)u]\}. \quad (9)$$

Вводя безразмерное расстояние  $\rho = r/r_D$ , записываем потенциал в виде

$$U(\rho) = \frac{e^2}{r_D} \left[ \frac{e^{-\rho}}{\rho} + \frac{a}{\pi} \int_0^{+\infty} u^2(u^2 + \rho^2)^{-3/2} J(u) du \right], \quad (10)$$

где  $x_0 = a\rho/\sqrt{u^2 + \rho^2}$ .

Функция  $J(u)$  на бесконечности выходит на константу  $J|_{u \rightarrow \infty} = -\pi \sin(a\rho)$ , поэтому интеграл в (10), вообще говоря, расходится. Однако в действительности внешний интеграл в (5) достаточно брать не до  $+\infty$ , а до  $k_{\max} = \omega_{Li}/\nu_s$ , где  $\nu_s = \sqrt{\varepsilon_F/M}$ ,  $\omega_{Li} = \omega_{Le}\sqrt{m/M}$ ,  $\omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m}n_e}$ , где  $n_e$  – концентрация электронов. Это следует из условия применимости формулы (1.4) статьи [1] для спектра ионного звука:  $\omega_{Li} \geq k\nu_s$ . Так, например, для водородной плазмы при энергии  $\varepsilon_F = 1$  эВ и концентрации  $n = 10^{22}$  см $^{-3}$  величина  $k_{\max} = \omega_{Li}/\nu_s$  достигает порядка  $10^8$  см $^{-1}$ . Соответственно, следует ограничить верхний предел интегрирования в (7) и (10) значением  $u_{\max} = k_{\max}\rho r_D = \rho(k_{\max} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{\varepsilon_F}}, r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{4\pi e^2 n_e}})$ . Окончательно получаем

$$U(\rho) = \frac{e^2}{r_D} \left[ \frac{e^{-\rho}}{\rho} + \frac{a}{\pi} \int_0^{\rho} u^2(u^2 + \rho^2)^{-3/2} J(u) du \right]. \quad (11)$$

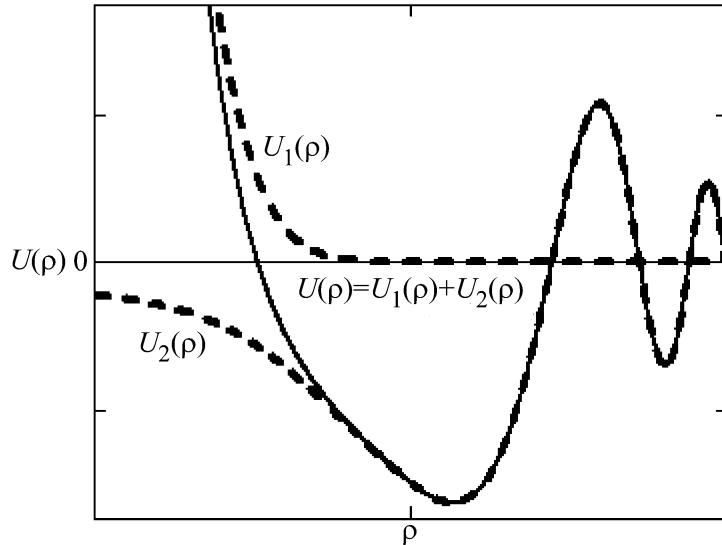


Рис. 1: Потенциал  $U(\rho)$  как сумма  $U_1(\rho)$  и  $U_2(\rho)$ .

Далее для удобства отображения результатов все потенциалы и функции в тексте, таблице 1 и на графиках будут рассчитываться в единицах  $e^2/r_D$ .

Т а б л и ц а 1

Сопоставление  $I_J(\rho, u)$  и  $I_H(\rho, u)$  при различных  $\rho$ 

$\rho$	$\Delta I_{\max}(\rho)$	$\mu, \%$	$u_{\max}$
1	$1.74 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^1$	1.61
2	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$1.28 \cdot 10^1$	1.95
4	$4.00 \cdot 10^{-4}$	$9.85 \cdot 10^0$	2.28
8	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$2.19 \cdot 10^0$	5.06
16	$3.23 \cdot 10^{-5}$	$4.97 \cdot 10^{-1}$	11.14

Рассматривая  $J(u)$  при различных значениях  $a$  и  $\rho$ , можно убедиться, что сложные выражения (8) и (9) при  $\rho > 1$  близки к достаточно элементарной почти периодической функции  $H(u) = -\pi \sin(x_0 u)$ . Подставив её в (11) и считая, что в подынтегральном выражении биномиальный множитель есть адиабатически медленная функция по  $u$ , а синусоида – быстрая, можно грубо оценить, что от  $U_2(\rho)$  следует ожидать периода по  $\rho$  приблизительно в  $\sqrt{2}$  раза больше, чем у предела  $J|_{u \rightarrow \infty}$  функции (9), и спада амплитуды по закону  $\sim 1/\rho$ . Кроме того, легко увидеть, что использование  $H(u)$  в (7) вместо  $J(u)$  равносильно использованию формулы (2.4) из [1] для  $U_2(\rho)$  (хотя и с ограничением верхнего предела в интеграле величиной  $\rho$ , а не бесконечностью). Следовательно, имеет смысл сравнить формулу (11) для точной функции  $J(u)$  из (9) и для приближённой  $H(u)$ , что означает сопоставление стационарного и нестационарного случаев. Будем различать случаи с помощью соответствующих нижних индексов  $J$  и  $H$ .

Рассмотрим целиком подынтегральное выражение в (11). Более всего функции  $J(u)$  и  $H(u)$  не совпадают друг с другом в нуле, однако, умножение их на биномиальный множитель во многом нивелирует эту разницу, так что выражения  $I_J(\rho, u) = u^2(u^2 + \rho^2)^{-3/2} J(u)$  и  $I_H(\rho, u) = u^2(u^2 + \rho^2)^{-3/2} H(u)$  не совпадают гораздо меньше. Это несовпадение проиллюстрировано в табл. 1 для водорода с  $a = 1.347 \cdot 10^{-2}$ . Из нее видно, что с увеличением расстояния  $\rho$  максимальная абсолютная погрешность  $\Delta I_{\max}(\rho) = \max_u |I_J(\rho, u) - I_H(\rho, u)|$  подмены  $J(u)$  функцией  $H(u)$  уменьшается. Уменьшается и соответствующая относительная погрешность подмены  $\mu = 100\% \cdot \Delta I_{\max}(\rho) / J(\rho, u_{\max})$ , вычисляемая в точке  $u_{\max}$  максимума погрешности  $\Delta I_{\max}(\rho)$ .

Убедившись, что за дебаевским радиусом функция  $I_J(\rho, u)$  достаточно приемлемо упрощается до  $I_H(\rho, u)$ , логично вычислить абсолютную погрешность  $\Delta U_{JH} = U_J(\rho) - U_H(\rho)$  соответствующих им потенциалов  $U_J(\rho)$  и  $U_H(\rho)$ . Ее график для  $a = 1.347 \cdot 10^{-2}$  приведен на рис. 2 и имеет максимум, равный  $4.15 \cdot 10^{-6}$ , вблизи точки  $\rho = 2.75$ . Пе-

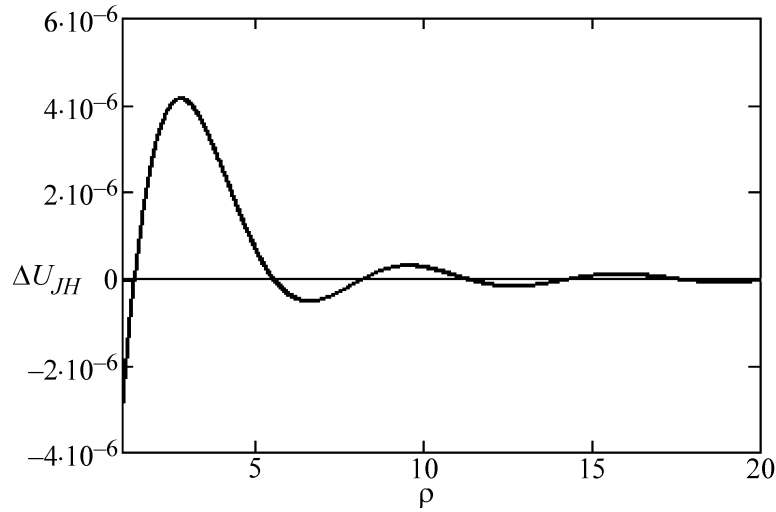


Рис. 2: Погрешность  $\Delta U_{JH}$  при замене  $I_J(\rho, u)$  функцией  $I_H(\rho, u)$  в выражении (10).

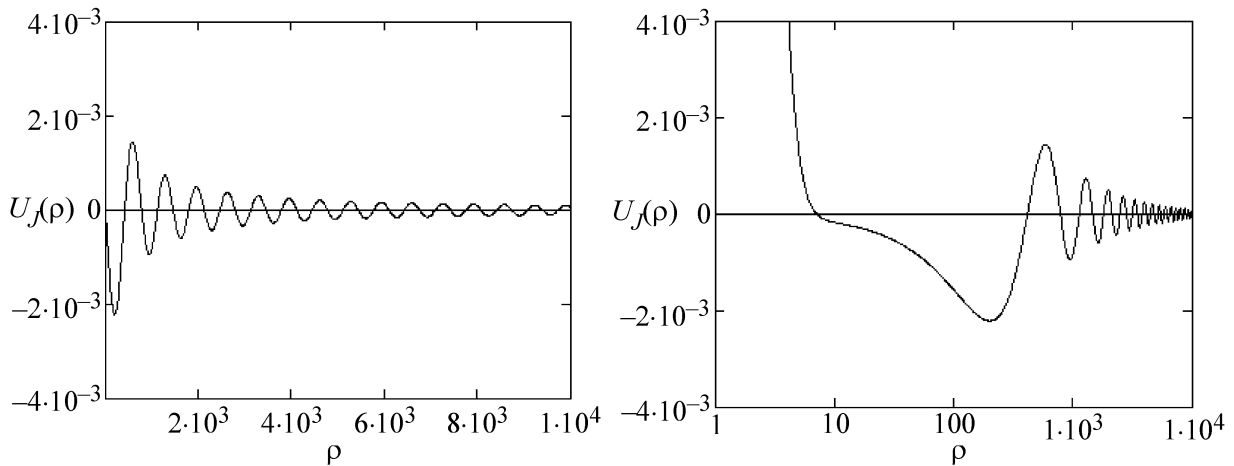


Рис. 3: Слева – потенциал  $U_J(\rho)$  для водородной плазмы  $a = 1.347 \cdot 10^{-2}$ . Справа – тот же график в логарифмическом масштабе по оси  $\rho$ .

риодический характер абсолютной погрешности свидетельствует о совпадении частот  $I_J(\rho, u)$  и  $I_H(\rho, u)$ . Амплитуда колебаний плавно спадает до нуля, что говорит о том, что выражение для части  $U_2(r)$  потенциала, ответственной за волновое взаимодействие электронов, на больших расстояниях  $\rho$  практически не отличается от выражения (2.4), полученного в [1]. Собственно потенциал  $U_J(\rho)$  изображен на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что вблизи нуля преобладает отталкивание электронов, но уже при  $\rho = 7.045$  отталкивание сменяется притяжением, так что глобальный минимум потенциала, равный  $-2.206 \cdot 10^{-3}$ , наблюдается вблизи значения  $\rho = 199.0$ . Далее энергия

притяжения ослабевает, и около  $\rho = 411.7$  притяжение сменяется отталкиванием. Далее знак потенциала продолжает чередоваться почти периодически примерно каждые  $a\pi 2\sqrt{2} \approx 660$  дебаевских радиусов.

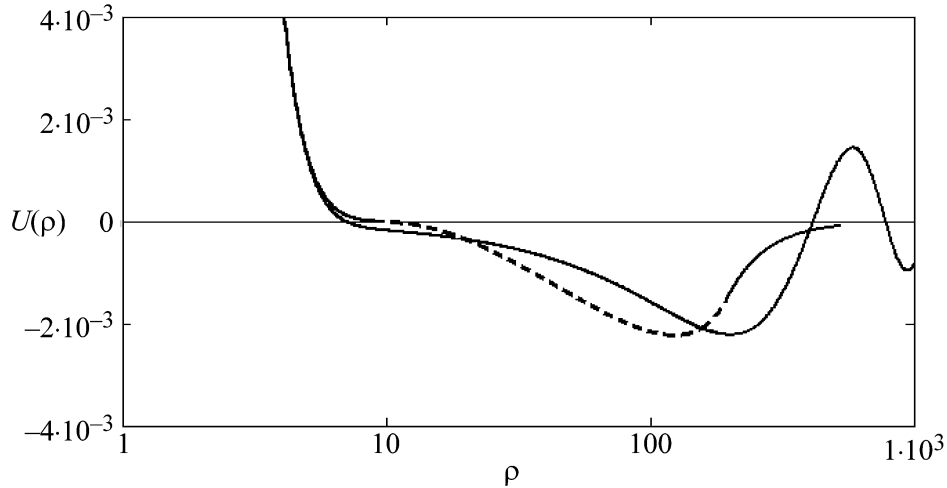


Рис. 4: Сопоставление графиков потенциала при  $a = 1.347 \cdot 10^{-2}$ : серая кривая – по формуле (11), сплошные черные участки – по формулам (2.5) и (2.6) из [1], пунктир – условное гладкое соединение сплошных участков.

Рассмотрим теперь вопрос о применимости потенциала (11) более подробно. Зная, что температура ионов равна  $T_i = e^2 n^{1/3}$ , из (1) численно получаем условие на концентрацию электронов  $\varepsilon_F = 5.316 \cdot 10^{-54} \frac{n_e^{2/3}}{m} \gg T_i \geq 2.31 \cdot 10^{-19} n_e^{1/3}$ , из которого следует, что концентрация должна быть  $n_e \gg 8.17 \cdot 10^{103} \cdot m^3$  (в единицах CGSE). Для водородной плазмы  $n_e \gg 6.16 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  (для сравнения, концентрация молекул комнатного воздуха примерно в 2300 раз меньше и составляет около  $2.69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ). Для оценок достаточно принять трехкратное превышение левой части сильного неравенства над правой. Возьмём для определённости концентрацию водородной плазмы, равной  $n_e = 1.85 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ . Тогда, подставляя выражение для энергии Ферми в дебаевский радиус, находим, что дебаевский радиус  $r_D = \sqrt{\frac{\sqrt{27} \pi \hbar}{8m} \frac{n_e^{-1/6}}{e}} \approx 1.84 \cdot 10^{-4} n_e^{-1/6}$  равен  $r_D = 2.44 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  при  $\varepsilon_F = 1.89 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$ . Глобальный же минимум потенциала (11) при  $\rho = 199.0$  равен тогда  $2.206 \cdot 10^{-3} \cdot e^2/r_D \approx 2.09 \cdot 10^{-14} \text{ эрг} = 1.30 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} = 151 \text{ К}$ .

*Выводы.* 1. Модель, рассмотренная в работе [1], качественно правильно описывает взаимодействие электронов в плазме с вырожденными электронами и холодными ионами, в которой может существовать ионный звук. Волновое взаимодействие электронов,

обусловленное обменом ионно-звуковыми волнами, соответствует притяжению электронов, а на расстояниях больше дебаевского радиуса может превосходить экранированное кулоновское взаимодействие.

2. Точная модель, рассмотренная в настоящей работе, может быть реализована в случае водородной плазмы только при высоких давлениях, порядка  $6 \cdot 10^3$  атмосфер и при температурах ниже 150 К. Возможно ли в такой плазме образование связанной электронной пары и возникновения условия для сверхпроводимости – это представляет собой самостоятельную проблему и будет рассмотрено в отдельной статье.

Авторы благодарят В. П. Силина за важное замечание, касающееся необходимости использования диэлектрической проницаемости (3). Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках Проекта РНФ № 14-29-00295.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. К. Битюков, А. А. Рухадзе, Краткие сообщения по физике ФИАН **42**(3), 3 (2015).
- [2] А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмopodobных сред* (М., Изд-во Московского университета. Физический факультет МГУ, 1999).
- [3] В. Ю. Попов, В. П. Силин, Физика плазмы **40**(4), 368 (2014). См. также статью В. П. Силина в сб. *Об основополагающих работах А. А. Власова по физике плазмы и их обсуждение* (М., “Мир журналов”, 2014).
- [4] В. П. Силин, Прикладная физика № 6, 5 (2012).
- [5] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*. Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган (М., Наука, 1979), стр. 59–76.

Поступила в редакцию 10 июля 2015 г.