УДК 533.93, 537.87

ОБ ОСОБЕННОСТИ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В. Б. Бобров[1,2], С. А. Тригер[1,3], А. Г. Загородний[4]

На основе результатов статистической квантовой электродинамики показано, что при рассмотрении нерелятивистской системы заряженных частиц, находящихся в макроскопическом объеме, потенциал кулоновского взаимодействия не имеет фурье-компоненты при нулевом волновом векторе. Этот результат имеет принципиальное значение при исследовании корреляционных функций кулоновской системы, в том числе при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна.

Ключевые слова: кулоновский потенциал взаимодействия, корреляционные функции; конденсат Бозе–Эйнштейна.

В статистической теории систем заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона (кулоновских систем – КС), до настоящего времени имеется нерешенный вопрос, связанный с определением значения фурье-образа потенциала кулоновского взаимодействия для волнового вектора $\mathbf{q} = 0$. Дело в том, что установление явного вида потенциала взаимодействия между заряженными частицами (закона Кулона) как функции расстояния между ними в теории поля осуществляется на основе фурье-преобразования уравнений Максвелла [1]. Согласно теории поля [1] кулоновский потенциал определяет электростатическое взаимодействие заряженных частиц, поэтому для определения фурье-образа потенциала кулоновского взаимодействия используется уравнение Пуассона, что и приводят к следующему результату при $\mathbf{q} \neq 0$

$$\nu_{ab}(q) = 4\pi z_a z_b e^2/q^2, \tag{1}$$

[1] Объединенный институт высоких температур РАН, 127412 Россия, Москва, ул. Ижорская, 13/19.

[2] Национальный исследовательский университет “МЭИ”, 111250 Россия, Москва, ул. Красноказарменная, 14.

[3] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: satron@mail.ru.

[4] Институт теоретической физики НАН Украины, 03680 Украина, Киев, Метрологична ул., 14б.

где $q = |\mathbf{q}|$, $z_a e$ – заряд частиц сорта a, а величина $\nu_{ab}(q)$ определяет электростатическое взаимодействие между заряженными частицами сортов a и b. При этом величина ν_{ab} $(\mathbf{q} = 0)$ остается неопределенной согласно уравнению Пуассона. В такой неопределенности, на первый взгляд, отсутствует физическая проблема, так как согласно классической теории поля непосредственный физический смысл имеет напряженность электрического поля, которая определяется волновыми векторами, не равными нулю [1]. Кроме того, с учетом (1) нетрудно установить закон Кулона, используя фурье-преобразование

$$\nu_{ab}(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\nu_{ab}(q)\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \frac{z_a z_b e^2}{r}, \tag{2}$$

где r – расстояние между заряженными частицами сортов a и b, так что неопределенность ν_{ab} $(\mathbf{q} = 0)$ не сказывается на виде функции $\nu_{ab}(r)$. Другими словами, величина $\nu_{ab}(r)$ определяется по известному значению $\nu_{ab}(q)$.

Однако ситуация изменяется при построении статистической теории для описания термодинамических, кинетических и электромагнитных свойств КС. При вычислении средних величин в статистической теории необходимо первоначально рассматривать систему в очень большом, но конечном объеме V, а затем перейти к так называемому термодинамическому предельному переходу: $N_a \to \infty$, $V \to \infty$, $\bar{n}_a = N_a/V = \text{const}$, где N_a – полное число частиц сорта a в рассматриваемой системе, которая занимает объем V и характеризуется заданной величиной средней плотности числа частиц $\bar{n}_a$ [2]. При этом многочастичная система заряженных частиц в силу дальнодействующего характера кулоновского взаимодействия (2) принципиально является многокомпонентной, так что для термодинамической устойчивости КС необходимым является условие квазинейтральности

$$\Sigma_a z_a e \bar{n}_a = 0. \tag{3}$$

По этой же причине другим условием термодинамической устойчивости является требование квантового описания КС с учетом эффектов тождественности частиц (см. подробнее [3]). Таким образом, при построении статистической теории для квантовой нерелятивистской КС вместо интегрального преобразования Фурье (2) для кулоновского потенциала необходимо использовать ряд Фурье

$$\nu_{ab}(r) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}\nu_{ab}(\mathbf{q})\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}). \tag{4}$$

До настоящего времени в подавляющем большинстве случаев при вычислении значения ν_{ab} $(\mathbf{q} = 0)$ исходят из того, что потенциал $\nu_{ab}(r)$ (2) известен в том смысле, что его величина определяется экспериментально установленным законом Кулона. В этом случае в соответствии с определением фурье-преобразования для потенциала $\nu_{ab}(r)$ (2)

$$\nu_{ab}(\mathbf{q}=0)=\int\limits_V d^3r\nu_{ab}(r),\quad \lim_{V\to\infty}V^{-1}\nu_{ab}(\mathbf{q}=0)=0. \tag{5}$$

Очевидно, что интеграл в (5) расходится как $V^{2/3}$, поэтому второе равенство в (5) выполняется. На этой основе из интуитивных соображений в работе [4] при определении термодинамических свойств слабонеидеальной плазмы было сформулировано утверждение о том, что

$$\nu_{ab}(\mathbf{q}=0)=0 \tag{6}$$

с учетом условия квазинейтральности в термодинамическом пределе. Аналогичное утверждение используется и при исследовании заряженного бозе-газа [5, 6], а также при рассмотрении корреляционных функций и линейных электромагнитных свойств КС [7]. Более того, как показано в [8], соотношение (7) является необходимым условием эквивалентности при использовании канонического и большого канонического распределений Гиббса для вычисления термодинамических свойств КС. Однако используемое в этом случае соотношение (5) не соответствует классической теории поля [1], согласно которой потенциал $\nu_{ab}(r)$ определяется на основе $\nu_{ab}(q)$ (2), а не наоборот. Кроме того, вычисление величины $\nu_{ab}(q)$ на основе $\nu_{ab}(r)$ связано с искусственной регуляризацией пространственного интеграла. При этом ссылка на справедливость закона Кулона для величины $\nu_{ab}(r)$ не может быть принята к рассмотрению в отношении элементарных заряженных частиц, так как закон Кулона экспериментально установлен для макроскопических заряженных тел (см. подробнее [9]).

С учетом сказанного выше для решения вопроса о значении величины ν_{ab} $(\mathbf{q}=0)$ необходимо обратиться к результатам квантовой теории поля, согласно которой заряженные частицы взаимодействуют между собой через квантованное электромагнитное поле. В рамках квантовой статистической электродинамики [10] можно говорить о соответствии между функцией Грина для квантованного электромагнитного поля $D_{\mu\nu}(k)$ $(\mu,\nu=0,1,2,3;\ k=(\omega/c,\mathbf{q}))$ и потенциалами взаимодействия между заряженными частицами. При этом следует использовать дискретное импульсное представление (см. (4) [11]). В этом случае 4-вектор потенциала, отвечающего квантованному электромагнитному полю, не содержит члена с $\mathbf{q}=0$, так как квант электромагнитного поля имеет энергию $\hbar c|\mathbf{q}|$. По этой причине величина волнового вектора $\mathbf{q}$ в функции Грина $D_{\mu\nu}(k)$ не может принимать нулевого значения. Это означает, что изменение импульса $\hbar\mathbf{q}$ в процессе взаимодействия должно быть отлично от нуля. Другими словами, не существует физической субстанции, которая является переносчиком взаимодействия, результатом которого является нулевая передача импульса.

В кулоновской калибровке, которая наиболее соответствует переходу к нерелятивистскому пределу при описании системы заряженных частиц, функция Грина $D_{00}^{(0)}(k)$ для свободного электромагнитного поля имеет вид $D_{00}^{(0)}(k) = 4\pi/q^2$, что соответствует кулоновскому потенциалу взаимодействия заряженных частиц. При наличии заряженных частиц функция Грина $D_{00}(k) = 4\pi/q^2\varepsilon^l(k)$, где $\varepsilon^l(k)$ – продольная диэлектрическая проницаемость системы заряженных частиц и квантованного электромагнитного поля [10], что полностью соответствует экранированному кулоновскому взаимодействию заряженных частиц для равновесной КС в нерелятивистском пределе [3]. Таким образом, согласно результатам квантовой статистической электродинамики утверждение (6) для величины ν_{ab} $(\mathbf{q} = 0)$ выполняется в том смысле, что потенциал кулоновского взаимодействия $\nu_{ab}(r)$ может быть представлен в виде ряда Фурье (4), в котором отсутствует член с $\mathbf{q} = 0$. Другими словами, соотношение ν_{ab} $(\mathbf{q} = 0) = 0$ в КС справедливо и без использования условия квазинейтральности. Это означает, что гамильтониан для нерелятивистской КС в представлении вторичного квантования следует записывать в следующем виде

$$\hat{H} = \sum_a \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_a(p) \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{2V} \sum_{a,b} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\{\mathbf{p}\sigma\}} \nu_{ab}(\mathbf{q}) \hat{a}^+_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}/2,\sigma_1} \hat{b}^+_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}/2,\sigma_2} \hat{b}_{\mathbf{p}_2+\mathbf{q}/2,\sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}/2,\sigma_1}, \tag{7}$$

где $\epsilon(p) = \hbar^2 p^2/2m_a$ – энергия свободной частицы сорта a с массой m_a, зарядом $z_a e$ и спином σ_a, $\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$ – соответственно операторы рождения и уничтожения для частиц сорта a с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и проекцией спина σ.

Результат (6) в указанном выше смысле имеет принципиальное значение для установления предельных соотношений для корреляционных функций в КС [7] и приводит к особенностям критических явлений в КС, в частности, возможности существования второй критической точки, непосредственно связанной с состоянием истинного диэлектрика (см. [12, 13] и цитированную тем литературу). Кроме того, при условии ν_{ab} $(\mathbf{q} = 0) = 0$ в КС возможно существование энергетической щели в одночастичном спектре возбуждений при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна [14]. Действительно, если в КС имеются заряженные частицы – бозоны (для определенности ядра сорта b с нулевым спином), то при ультранизких температурах такая КС перейдет в состояние с конденсатом Бозе–Эйнштейна (КБЭ) [14]. При этом справедливо равенство

$$f_b(\mathbf{p}) = N_b^{(\mathrm{BEC})}\delta_{\mathbf{p},0} + f_b^{(\mathrm{over})}(p)\cdot(1-\delta_{\mathbf{p},0}), \tag{8}$$

где $N_b^{(\mathrm{BEC})} \equiv n_b^{(\mathrm{BEC})}\cdot V$, $n_b^{(\mathrm{BEC})}$ – плотность числа частиц в КБЭ, $f_b^{(\mathrm{over})}(p)$ – одночастичная функция распределения по импульсам $\hbar p$ для "надконденсатных" ($p \neq 0$) частиц сорта b. В свою очередь, для спектральной функции $A_b(p,\omega)$, однозначно определяющей одночастичную функцию Грина для частиц сорта b с массой m_b и химическим потенциалом μ_b, выполняется точное соотношение (см., напр., [15, 16]), которое с учетом (6) имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega A_b(p,\omega)\frac{d\omega}{2\pi} = E_b(p), \quad E_b(p) = \frac{\hbar^2 p^2}{2m_b} - \mu_b + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_{bb}(\mathbf{q})f_b(\mathbf{q}+\mathbf{p}). \tag{9}$$

Из (8), (9) непосредственно следует, что функция $E_b(p)$ для КС испытывает разрыв в точке $p = 0$.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01492).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973).

[2] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику* (М., Наука, 1984).

[3] W. Ebeling, W.-D. Kraeft, D. Kremp, and G. Ropke, *Quantum Statistics of Charged Particle Systems* (Springer, Berlin, 2013).

[4] А. А. Веденов, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **36**, 1133 (1959).

[5] L. L. Foldy, Phys. Rev. **124**, 649 (1961).

[6] E. H. Lieb and J. P. Solovej, Commun. Math. Phys. **252**, 485 (2004).

[7] В. Б. Бобров, Н. И. Ключников, С. А. Тригер, ТМФ **89**, 263 (1991).

[8] V. B. Bobrov, I. M. Sokolov, and S. A. Trigger, Phys. Plasmas **19**, 062101 (2012).

[9] L.-C. Tu and J. Luo, Metrologia **41**, S136 (2004).

[10] Е. С. Фрадкин, Труды ФИАН **29**, 7 (1965).

[11] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей* (М., Наука, 1984).

[12] V. B. Bobrov, Phys. Rev. E **86**, 026401 (2012).

[13] V. B. Bobrov, S. A. Trigger, and A. G. Zagorodny, EPL (Europhys. Lett.) **101**, 16002 (2013).

[14] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, Краткие сообщения по физике ФИАН **41**(12), 58 (2014).

[15] О. К. Калашников, Е. С. Фрадкин, ТМФ **5**, 417 (1970).

[16] В. Б. Бобров, А. Г. Загородний, С. А. Тригер, Доклады Академии наук **461**, 400 (2015).

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.