

**ПОДАВЛЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ВЫБРОСОВ
ВБЛИЗИ РЕБРА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО КЛИНА
ВРАЩЕНИЕМ ЭЛЛИПСА ПОЛЯРИЗАЦИИ
ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ**

А. В. Боровский¹, А. Л. Галкин^{2,3}

Исследованы эффекты поляризационного подавления дифракционных пространственных вариаций интенсивности для плоской электромагнитной волны с эллиптической поляризацией вблизи ребра идеально проводящего прямоугольного клина.

Ключевые слова: задачи субволновой оптики, строгая теория дифракции, численное моделирование дифракции на клине, монохроматическая волна с эллиптической поляризацией.

Введение. В последние годы не ослабевает внимание к направлению физических исследований, известному под названием “субволновая оптика” [1]. В рамках этого направления изучается структура оптических полей и лазерного излучения на расстояниях, сравнимых с длиной волны, в частности вблизи изломов поверхности, игл, клиньев и других конфигураций вещества. Задачи субволновой оптики имеют выход на теорию оптических приборов, спектроскопию наноструктур и некоторые задачи лазерной физики. Для исследования в данной статье применим строгую теорию дифракции.

Методы решения задач дифракции можно расположить в следующем иерархическом порядке: метод эйконала [2, 3], параболического уравнения [4–8], уравнения Гельмгольца [3, 6, 7, 9–22], нестационарного волнового уравнения [8, 3, 15]. Особое место в этих исследованиях занимает задача дифракции плоской волны на клине. Выделяют клин с идеально проводящей поверхностью [3, 7, 10, 12–15, 23–25], с частично поглощающей поверхностью [18–20], с диэлектрической поверхностью [19], с анизотропно от-

¹ Байкальский государственный университет экономики и права (БГУЭП), кафедра информатики и кибернетики, 664003 Россия, Иркутск, ул. Ленина, 11.

² ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

³ ГБОУ ВПО РНИМУ им. Н. И. Пирогова Минздрава России, кафедра физики МБФ, 117997 Россия, Москва, ул. Островитянова, д. 1.

ражающей поверхностью [21]. Рассматривались также другие варианты, применимые главным образом в акустике [22].

В литературе предложены разнообразные численные методы решения задачи дифракции. Обзор некоторых методов дан в работе [26]. Они делятся на конечно-разностные, интегральные, вариационные и другие. Существенную сложность представляет учет условий излучения Зоммерфельда на бесконечности и условий Мейкснера в нуле.

Целью данной работы является анализ влияния поляризации падающей волны на распределение интенсивности оптических полей вблизи острого края клина на расстояниях порядка $0 < \rho = kr < 100$.

Общие решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. Рассмотрим клин с углом при вершине $\delta < \pi$ (рис. 1). Случай $\delta > \pi$ приводит к уголкового отражателю и здесь не рассматривается. На клин падает внешняя плоская электромагнитная волна, характеризуемая волновым вектором \mathbf{k} . В полярной системе координат вектор \mathbf{k} задается модулем $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны, и полярным углом β . (По ряду причин удобнее использовать угол Зоммерфельда $\gamma = \beta - \pi$.) Точка наблюдения задается модулем радиус-вектора $r = |\mathbf{r}|$ и полярным углом φ .

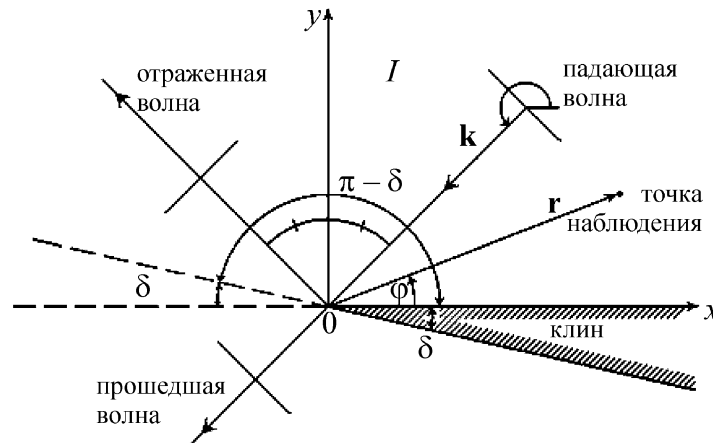


Рис. 1: Дифракция плоской волны на клине. Геометрия задачи.

Произвольное электромагнитное поле в двумерном случае можно представить в виде линейной суперпозиции полей, обладающих ТЕ и ТМ поляризациями [3]. Имеется в виду поперечность электрического или магнитного вектора плоскости падения волны, образованной волновым вектором и перпендикуляром к поверхности отражения. Поэтому особый интерес представляет исследование дифракции электромагнитного поля,

обладающего этими двумя поляризациями. В случае ТЕ и ТМ волн электрическое и магнитное поля, параллельные краю клина, определяются выражениями

$$E(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [U_E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}], \quad H(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [U_H(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].$$

Комплексные функции $U_E(\mathbf{r})$ и $U_H(\mathbf{r})$ являются решениями краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. Далее индексы E и H опустим.

Выражение для комплексной амплитуды $U(\mathbf{r})$ падающей плоской волны в полярных координатах имеет вид [10]

$$U_g^+(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta), \quad \rho = kr, \quad \theta = \varphi - \gamma. \quad (1)$$

Краевая задача дифракции ставится следующим образом: требуется найти решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0 \quad (2)$$

в области углов $0 < \varphi < 2\pi - \delta$ при любых значениях радиуса $0 < \rho < \infty$. На поверхностях клина ставится условие равенства нулю решения (условие I рода, для ТЕ волны), либо его производной по углу φ (условие II рода, для ТМ волны)

$$U|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \right). \quad (3)$$

Задачи с постановкой более сложных условий выходят за рамки данного рассмотрения. Уравнение (2) имеет особые точки $\rho = 0$ и $\rho = \infty$, поэтому для обеспечения ограниченности энергии в любой конечной области, в окрестности особых точек для решения краевой задачи с источниками волн на бесконечности на решение U ставятся интегральные условия Мейкснера и Зоммерфельда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \operatorname{Im} \left(U^* \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) d\varphi \right\} = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \left| \frac{\partial U}{\partial \rho} - iU \right|^2 d\varphi \right\} = 0. \quad (5)$$

Условия (4) и (5) обеспечивают единственность краевой задачи [19, 20].

В силу линейности уравнения Гельмгольца решение краевой задачи можно разложить на сумму решений геометрической оптики и дифракционной составляющей

$$U = U_g + U_d. \quad (6)$$

Решения геометрической оптики приведены, например, в [7, 15].

Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в секторе можно представить в виде комбинации дифракционных контурных интегралов, которая удовлетворяет краевым условиям, а также условиям на бесконечности и в нуле

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_T^C(\rho, \varphi - \gamma) \mp U_T^C(\rho, \varphi + \gamma). \quad (7)$$

Здесь знаки минус и плюс соответствуют задачам Дирихле и Неймана, а период T дифракционного интеграла равен $T = 2(2\pi - \delta)$, где δ – угол при вершине клина. Представление (7) соответствует записи решения задачи [14, формулы (94.1–2)]. В выражении (7) индексы дополнительно указывают период T и контур интегрирования C согласно [10, 12, 14, 15]. Дифракционный интеграл имеет представление в виде ряда Фурье–Бесселя, при численных расчетах которого достаточно учесть 200 членов. Подробности таких расчетов комплексных амплитуд для электромагнитных ТЕ и ТМ полей изложены в [25, 26].

Наблюдаемой величиной в задаче дифракции является интенсивность электромагнитной волны, которая равна модулю вектора Умова–Пойнтинга, усредненного по быстрым осцилляциям электромагнитного поля [3]

$$I = |\mathbf{S}| = \frac{c}{8\pi} |\operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)|. \quad (8)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} – стационарные комплексные амплитуды электрического и магнитного полей, являющиеся решением краевой задачи дифракции. Далее вектор Умова–Пойнтинга и интенсивность дифракционного поля нормируем на интенсивность падающей волны.

Вычисление векторного произведения в (8) приводит к выражениям

$$\mathbf{S}_{TE} = -\mathbf{e}_x \operatorname{Re}(E_z H_y^*) + \mathbf{e}_y \operatorname{Re}(E_z H_x^*), \quad (9)$$

$$\mathbf{S}_{TM} = \mathbf{e}_x \operatorname{Re}(E_y H_z^*) - \mathbf{e}_y \operatorname{Re}(E_x H_z^*). \quad (10)$$

В \mathbf{S}_{TE} входят только компоненты ТЕ волны, в \mathbf{S}_{TM} – ТМ волны. Поэтому дифракция ТЕ и ТМ волн протекает независимо друг от друга. Подставив в (9) и (10) решения краевой задачи, приходим к одинаковому выражению для ТЕ и ТМ волн [19]

$$\mathbf{S} = \operatorname{Re}\{iU\nabla U^*\} = \mathbf{e}_x \operatorname{Re}\left(iU \frac{\partial U^*}{\partial x}\right) + \mathbf{e}_y \operatorname{Re}\left(iU \frac{\partial U^*}{\partial y}\right). \quad (11)$$

В полярных координатах

$$I = |\mathbf{S}| = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \rho} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \rho} \right]^2}. \quad (12)$$

Особенностью выражения (12) является независимость интенсивности от знака мнимой части решения уравнения Гельмгольца. Это позволяет не следить за знаком комплексной части решения уравнения Гельмгольца, что несколько упрощает исследование.

Построение решения на основе уравнения Гельмгольца в случае эллиптической поляризации. Рассмотрим произвольный случай эллиптической поляризации, когда главная ось эллипса поляризации повернута на угол α относительно оси z , т.е. ребра клина. Для решения задачи дифракции разложим эллиптически-поляризованную волну на сумму двух линейно-поляризованных ТЕ и ТМ волн. Обозначим E_+, E_- – максимальные амплитуды электрического поля вдоль осей эллипса поляризации. Поле эллиптически-поляризованной волны можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_+ \cos(\mathbf{kr} - \omega t) + \mathbf{E}_- \sin(\mathbf{kr} - \omega t) = \operatorname{Re}[(\mathbf{E}_+ - i\mathbf{E}_-)e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}]. \quad (13)$$

Используем запись для комплексного поля. Найдем электрические поля для ТЕ и ТМ компонент исходной волны

$$E_{TE} = ((\mathbf{E}_+ - i\mathbf{E}_-) \cdot \mathbf{e}_z)e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} = (E_+ \cos \alpha + iE_- \sin \alpha)e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \quad (14)$$

$$E_{TM} = \left(E_+ \sin \alpha - iE_- \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} = (E_+ \sin \alpha - iE_- \cos \alpha)e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \quad (15)$$

α – угол поворота главных осей эллипса относительно ребра клина. Значения интенсивности ТЕ и ТМ волн равны

$$I_{TE} = \frac{c}{8\pi} (E_+ \cos \alpha + iE_- \sin \alpha)(E_+ \cos \alpha + iE_- \sin \alpha)^* = I_+ \cos^2 \alpha + I_- \sin^2 \alpha, \quad (16)$$

$$I_{TM} = \frac{c}{8\pi} (E_+ \sin \alpha - iE_- \cos \alpha)(E_+ \sin \alpha - iE_- \cos \alpha)^* = I_+ \sin^2 \alpha + I_- \cos^2 \alpha. \quad (17)$$

Легко убедиться, что

$$I_{TE} + I_{TM} = I_+ + I_-, \quad I_{\pm} = \frac{c}{8\pi} E_{\pm}^2. \quad (18)$$

Далее используем численные решения дифракционных задач для ТЕ и ТМ волн по отдельности с комплексными исходными амплитудами U и W соответственно [24, 25]. Вектор Умова–Пойнтинга для суперпозиции ТЕ и ТМ волн получается сложением (9) и (10)

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_x (\operatorname{Re}(E_y H_z^*)_{TM} - \operatorname{Re}(E_z H_y^*)_{TE}) + \mathbf{e}_y (\operatorname{Re}(E_z H_x^*)_{TE} - \operatorname{Re}(E_x H_z^*)_{TM}).$$

В результате приходим к выражению для интенсивности

$$I = |\mathbf{S}| = \frac{1}{I_{TE} + I_{TM}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[I_{TE} \left(\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right) + I_{TM} \left(\operatorname{Re} W \frac{\partial \operatorname{Im} W}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} W \frac{\partial \operatorname{Re} W}{\partial \varphi} \right) \right]^2 +$$

$$+ \left[I_{TE} \left(\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right) + I_{TM} \left(\operatorname{Re} W \frac{\partial \operatorname{Im} W}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} W \frac{\partial \operatorname{Re} W}{\partial \varphi} \right) \right]^2}, \quad (19)$$

$$I_{TE} = I_+ \cos^2 \alpha + I_- \sin^2 \alpha, \quad I_{TM} = I_+ \sin^2 \alpha + I_- \cos^2 \alpha, \quad I_{TE} + I_{TM} = I_+ + I_- = I_0. \quad (20)$$

Эллиптическая волна характеризуется двумя параметрами: степенью эллиптичности $\sigma_e = I_-/I_+$, $0 < \sigma_e < 1$, и углом $0 < \alpha < \pi/2$. Формулы (19)–(20) описывают дифракцию на клине волн с произвольной поляризацией – линейной, циркулярной и эллиптической. Первые две поляризации являются частными случаями эллиптической. Расчеты дифракции эллиптически-поляризованной волны представлены на рис. 2.

Если в выражениях (19)–(20) положить $I_{TM} = 0$, $I_{TE} \neq 0$ или $I_{TE} = 0$, $I_{TM} \neq 0$, то приходим к случаю дифракции на клине одиночных ТЕ или ТМ волн. Выражения (19)–(20) при этом переходят в (12), где в случае ТМ волны функцию U следует заменить на W .

На рис. 3(а) показаны угловые распределения интенсивности для дифракционного поля линейно-поляризованной волны, с плоскостью поляризации, повернутой на угол α относительно ребра клина. Рассматривается вертикальное падение $\gamma = \pi/2$ на прямоугольный клин $\sigma = \pi/2$ для $\rho = 100$.

Из результатов расчетов следует, что при скользющем падении (термин применяется к случаю, когда направление волнового вектора волны параллельно грани клина) ТМ волна менее подвержена дифракции в отличие от ТЕ волны. Данный эффект возникает из-за проникновения электромагнитного поля в зону “геометрической тени”

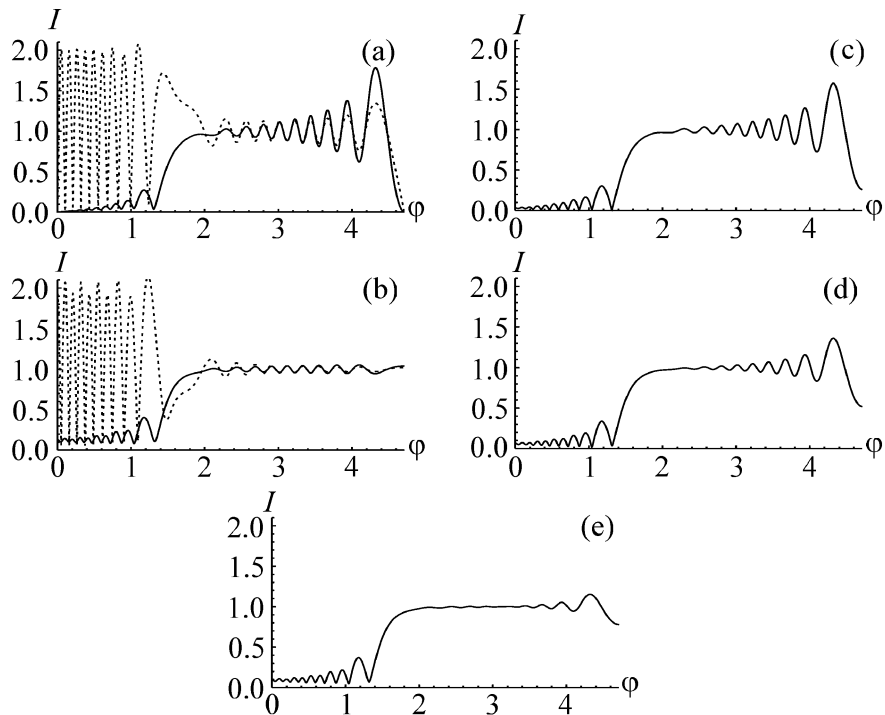


Рис. 2: Угловые распределения интенсивности дифракционного поля для ТЕ-волны (a), ТМ-волны (b), эллиптически-поляризованной волны: $\sigma_e = 1/3$ (c), $\sigma_e = 1$ (d), $\sigma_e = 3$ (e) – $\gamma = \pi/2$, $\delta = \pi/2$, $\rho = 30$. Модуль решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца (точки).

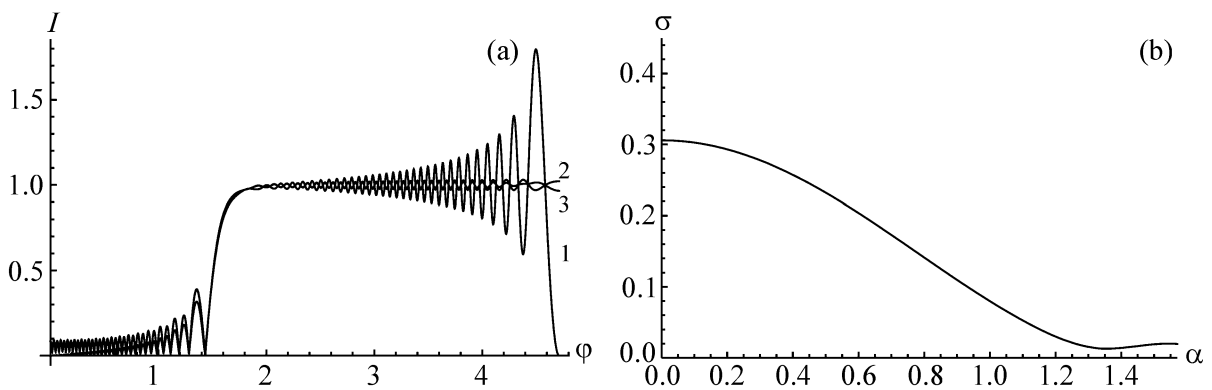


Рис. 3: (a) Угловые распределения интенсивности для $\gamma = \pi/2$, $\delta = \pi/2$, $\rho = 100$: $\alpha = 0(1), \pi/2(2), 1.33518(3)$. (b) Зависимость среднеквадратичных отклонений интенсивности от угла поворота плоскости поляризации линейно-поляризованной волны.

вблизи вертикальной стенки клина. Количественной характеристикой пространственных вариаций интенсивности является среднеквадратичное отклонение интенсивности дифракционного поля от интенсивности прошедшей волны геометрической оптики, равной единице

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} [I(\varphi, \alpha) - 1]^2 d\varphi}.$$

График величины $\sigma(\alpha)$ представлен на рис. 3(b). Он показывает, что поворотом плоскости поляризации можно существенно понизить уровень пространственных вариаций интенсивности. Кривая $\sigma(\alpha)$ имеет неярко выраженный минимум при $\alpha = 1.33$. Как показывают расчеты, положение минимума практически не зависит от величины ρ . Дифракция мала (подразумевается малость отклонения стационарных дифракционных возмущений интенсивности от интенсивности, которая получилась бы в геометрооптическом приближении) в диапазоне углов $1.2 < \alpha < \pi/2$.

Для сравнения на рис. 2((a), (b)) и (d) представлено решение краевой задачи дифракции для циркулярно-поляризованной волны. Циркулярно-поляризованная волна не обладает таким параметром, как угол поворота плоскости поляризации α .

Отметим, что в некоторых работах рассчитывают модуль решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца. На рис. 2 представлено сравнение расчетов интенсивности на основе математической модели, использованной в данной статье (6), (18)–(19), и модуля решения краевой задачи. Рис. 2 показывает существенное отличие этих решений.

Заключение. В данной работе показано, что пространственные распределения электромагнитных полей и их интенсивностей вблизи ребра клина сильно зависят от степени эллиптичности падающей волны. Установлен эффект снижения дифракционных пространственных вариаций интенсивности оптического поля, который возникает при повороте плоскости поляризации линейно-поляризованной волны. Найден диапазон углов поворота плоскости поляризации, в пределах которого пространственные вариации малы. Проведены расчеты дифракции циркулярно- и эллиптически-поляризованных волн на клине. Уровень дифракционных вариаций интенсивности в случае циркулярной поляризации меньше уровня вариаций для ТЕ волны, но больше уровня вариаций для ТМ волны. Показано, что интенсивность оптического поля в задачах дифракции на клине, рассчитанная как модуль вектора Умова–Пойнтинга, усредненного по периоду оптического поля, отличается от расчетов модуля решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Результаты работы могут быть использованы при исследованиях в сфере субволновой оптики, в которых необходимо учитывать эффекты поляризации для транзитного света, а также рассчитывать интенсивность дифракционного поля для прошедших волн. В частности, при достаточности аппроксимации исследуемого объекта клином появляется возможность влиять на уровень дифракционных вариаций интенсивности вблизи поверхности клина поворотом плоскости поляризации падающей волны.

Работа частично поддержана РФФИ, грант N 13–03–01259.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] В. П. Тычинский, УФН **166**, 1219 (1996).
- [2] J. V. Keller, J. Opt. Soc. Am. **52**, 116 (1962).
- [3] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики* (М., Наука, 1973).
- [4] М. А. Леонтович, В. А. Фок, ЖЭТФ **16**, 557 (1946).
- [5] В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн* (М., Наука, 1970).
- [6] Р. Б. Ваганов, Б. З. Кацеленбаум, *Основы теории дифракции* (М., Наука, 1982).
- [7] П. Я. Уфимцев, *Теория дифракции краевых волн в электродинамике* (М., Изд. “Бином”, 2012).
- [8] А. В. Боровский, А. Л. Галкин, *Лазерная физика* (М., Изд. Атомной техники, 1996), с. 230.
- [9] A. Sommerfeld, *Mathematische Annalen* **47**, 317 (1896).
- [10] А. Зоммерфельд, *Оптика* (М., ИЛ, 1953).
- [11] G. Kirchhoff, *Ann. d. physik* **18**, 663 (1883).
- [12] Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики* (М., ОНТИ, 1937).
- [13] Г. Гринберг, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений* (М., Изд-во АН СССР, 1948).
- [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1982).
- [15] Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны* (М., Радио и связь, 1990).
- [16] G. Green, *Mathematical papers of the late George Green*, Ed. by N. M. Ferrers (Macmillan, London, 1871).

- [17] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции* (М., Физматгиз, 1959).
- [18] Г. Д. Малюжинец, *ДАН СССР* **3**, 752 (1958).
- [19] В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда–Малюжинца в теории дифракции* (Санкт-Петербург, СПГУ, 2003).
- [20] М. А. Лялинов, *Дисс. докт. физ.-мат. наук* (Санкт-Петербург, СПГУ, 2004).
- [21] Е. П. Курушин, Е. И. Нефедов, А. Т. Фиалковский, *Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах* (М., Наука, 1975).
- [22] В. М. Бабич, А. А. Мацковский, *Записки научных семинаров ПОМИ*, Санкт-Петербург **369**, 5 (2009).
- [23] А. В. Боровский, А. Н. Бородин, *Дифракционный интеграл Франка–Зоммерфельда* (Иркутск, Изд. БГУЭП, 2012).
- [24] А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин, *Математическая дифракция плоской волны на идеально проводящем клине* (Иркутск, Изд. БГУЭП, 2013).
- [25] А. В. Боровский, А. Л. Галкин, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **41**(1), 13 (2014).
- [26] В. В. Котляр, Д. В. Нестеренко, *26-я Школа по когерентной оптике и голографии* (Иркутск, Папирус, 2008), с.371.

Поступила в редакцию 12 ноября 2014 г.