

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РЕКОНСТРУКЦИИ СОБЫТИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ЛОРД С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О СПЕКТРЕ СИГНАЛА

Г. А. Гусев¹, З. Г. Гусева², Ч. Т. Маунг^{1,3}

С использованием метода модифицированного случайного поиска рассмотрено решение обратной задачи реконструкции события в лунном эксперименте ЛОРД с применением спектрального анализа сигнала, когда полная полоса частот 200–400 МГц разбивается на четыре равных полосы частот. Получение дополнительной информации о сигнале позволяет добиться более высокой точности в решении обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, каскад, космические лучи, радиометод, широкополосный приём, спектральный анализ, калибровка алгоритма.

В недалёком будущем планируется эксперимент “ЛОРД” (Лунный Орбитальный Радиоволновой Детектор) [1–3], который предполагает развитие радиометода регистрации частиц ультравысоких энергий с привлечением космических технологий в далёком космосе и использования Луны в качестве мишени для взаимодействия космических лучей и нейтрино ультравысоких энергий (КЛУВЭ и НУВЭ). Этот эксперимент позволит впервые оценить возможности нового направления по сравнению с возможностями больших наземных установок, использующих традиционные методы регистрации широких атмосферных ливней. Первый шаг в решении обратной задачи реконструкции энергии и углов прихода частицы был сделан в работе [4], в которой была использована минимальная экспериментальная информация о сигнале: амплитуда электрического поля в полосе регистрации 200–400 МГц.

В работе авторов [4] было показано, что некорректность обратной задачи, выражающаяся в неоднозначности решения задачи по нахождению параметров, характеризующих искомое событие, может быть формально устранена с помощью простой процедуры

¹ ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: gusevgag@mail.ru.

² ИЗМИРАН, 142190 Россия, Московская обл., г. Троицк, Калужское ш., 4.

³ МФТИ, 141700 Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

осреднения по ансамблю событий-кандидатов на решение, приближённо удовлетворяющих исходному уравнению. Большой разброс параметров, удовлетворяющих одному уравнению, приводит, вообще говоря, к большим ошибкам в предложенном решении, особенно при малых амплитудах измеренного сигнала. Это связано с недостаточной информацией, получаемой в простейшей постановке эксперимента, для однозначного определения всех параметров регистрируемого события. С другой стороны, в работе [4] предложено вероятностное решение, предполагающее, что определяемый в настоящее время спектр КЛУВЭ [5] может быть экстраполирован до энергий 10^{21} эВ. Поскольку точность восстановления энергии первичной частицы, определённая в работе [4], скорее всего, завышена, то в рамках эксперимента “ЛОРД” желательно увеличить количество информации о сигнале, например, с помощью спектрального анализа в лаборатории, чтобы получить несколько уравнений для спектральных амплитуд для разных спектральных полос.

Итак, рассмотрим разбиение всей полосы сигнала на 4 полосы шириной по 50 МГц: 200–250, 250–300, 300–350 и 350–400 МГц с помощью граничных частот: $f_1 = 200$ МГц, $f_2 = 250$ МГц, $f_3 = 300$ МГц, $f_4 = 350$ МГц, $f_5 = 400$ МГц. Проинтегрируем по частоте в каждой из четырёх полос формулу для электрического поля вблизи антенны из работы [4], тогда, например, для полосы с граничными частотами $f_1 = 200$ МГц и $f_2 = 250$ МГц будем иметь:

$$E(\theta_s, \varphi_n, \theta_n, W) = 0.25 \text{Norm } W(\text{ТэВ}) \frac{1}{f_0} \times \\ \times \frac{(\exp[-\beta f_1^2(\text{МГц})] - \exp[-\beta f_2^2(\text{МГц})])}{[1 + ((f_1 + f_2)/2f_0)^{1.44}]} \frac{T_s}{\beta R_s(\text{км})} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_C} \text{мкВ/м}, \quad (1) \\ \beta = (\cos \theta_C - \cos \theta)^2 (70 + 3.3 \ln(W(\text{ТэВ}))),$$

где $\text{Norm} \approx 0.232$ (мкВ/ТэВ/МГц), $f_0 \approx 3.3$ ГГц,

$$T_s(\theta_s) = \frac{2 \cos \theta_t}{n \cos \theta_t + \cos \theta_i}, \quad R_s(\theta_s) = (R_M + h) \sqrt{(1 + \cos^2 \theta_M - 2 \cos \theta_M \cos \theta_s)}, \\ \sin \theta_t = \sin \theta_s (R_M + h) / R_s(\theta_s), \quad \sin \theta_t = n \sin \theta_i, \\ \cos \theta = -\cos \theta_n \cos \theta_i + \sin \theta_n \sin \theta_i \cos \varphi_n, \quad (2)$$

где θ_C – черенковский угол, θ_s – угол между нормалью в точке выхода излучения из реголита и спутниковой нормалью, θ_M – максимальный угол θ_s , θ_n – полярный угол падения первичной частицы, φ_n – азимутальный угол ее падения, отсчитываемый от

направления падающего излучения каскада, W – энергия частицы. Здесь $R_s(\theta_s)$ – расстояние от спутника (на высоте h) до точки на поверхности, $T_s(\theta_s)$ – коэффициент прохождения излучения в вакуум при пересечении поверхности Луны, а θ_i и θ_t – углы падения и преломления радиоволн на поверхности Луны. Углы θ_i , θ_t , и θ выражаются через θ_s , φ_n , θ_n с помощью соотношений (2). Для нахождения сигнала (напряжения) на входе приёмника выражение для электрического поля, получаемого в теоретической модели радиоизлучения каскада в реголите Луны, нужно выражение (1) для электрического поля умножить на усреднённую по частоте эффективную длину антенны l_{eff} , равную в нашем случае 0.44 м (следует учитывать слабую зависимость l_{eff} от частоты). Кроме того, следует учесть её зависимость от угла между осью антенны, которая направлена по спутниковой вертикали, и направлением на источник излучения, то есть учесть диаграмму направленности (ДН) антенны. В нашем случае в полосе 200–400 МГц для выбранной для первого эксперимента “ЛОРД” антенны эта угловая зависимость имеет вид $f(\theta_{\text{nad}}) = \cos^{3.4}(\theta_{\text{nad}})$ [4], θ_{nad} – надирный угол (угол между спутниковой вертикалью и направлением на источник, ось антенны направлена вдоль вертикали спутника).

В результате получим следующую систему четырёх уравнений:

$$E_1 = \frac{W}{R_s} C_1 \Phi_1(\theta_s, \theta_n, \varphi_n), \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{W}{R_s} C_2 \Phi_2(\theta_s, \theta_n, \varphi_n), \quad (4)$$

$$E_3 = \frac{W}{R_s} C_3 \Phi_3(\theta_s, \theta_n, \varphi_n), \quad (5)$$

$$E_4 = \frac{W}{R_s} C_4 \Phi_4(\theta_s, \theta_n, \varphi_n). \quad (6)$$

Здесь

$$\Phi_1(\theta_s, \theta_n, \varphi_n) = (B/\beta)(\exp(-\beta f_1^2) - \exp(-\beta f_2^2)) \cos^{3.4} \theta_{\text{nad}}(\theta_s), \quad (3')$$

$$\Phi_2(\theta_s, \theta_n, \varphi_n) = (B/\beta)(\exp(-\beta f_2^2) - \exp(-\beta f_3^2)) \cos^{3.4} \theta_{\text{nad}}(\theta_s), \quad (4')$$

$$\Phi_3(\theta_s, \theta_n, \varphi_n) = (B/\beta)(\exp(-\beta f_3^2) - \exp(-\beta f_4^2)) \cos^{3.4} \theta_{\text{nad}}(\theta_s), \quad (5')$$

$$\Phi_4(\theta_s, \theta_n, \varphi_n) = (B/\beta)(\exp(-\beta f_4^2) - \exp(-\beta f_5^2)) \cos^{3.4} \theta_{\text{nad}}(\theta_s) \quad (6')$$

и $B = 0.25 \text{Norm } T_s l_{\text{eff}}(\text{М}) \frac{\sin \theta}{\sin \theta_C} \frac{1}{f_0(\text{МГц})}$, $C_1 = 1/(1 + ((f_1 + f_2)/2f_0)^{1.44})$, $C_2 = 1/(1 + ((f_2 + f_3)/2f_0)^{1.44})$, $C_3 = 1/(1 + ((f_3 + f_4)/2f_0)^{1.44})$, $C_4 = 1/(1 + ((f_4 + f_5)/2f_0)^{1.44})$.

В силу того, что с высокой точностью можно пренебречь слабой логарифмической зависимостью функции $\beta(W)$ от энергии частицы (см. формулы (1), (2)), зависимость

электрического поля от энергии частицы является линейной, и появляется возможность разделить задачу определения углов события и задачу определения энергии частицы и тем самым видоизменить обратную задачу. Возьмём отношения равенства (3) соответственно к равенствам (4), (5) и (6) и получим три независимых уравнения, в которые не входит энергия частицы, а также расстояние от приёмника до источника излучения:

$$E_{12} = C_{12}\Phi_{12}(\theta_s, \theta_n, \varphi_n), \quad (7)$$

$$E_{13} = C_{13}\Phi_{13}(\theta_s, \theta_n, \varphi_n), \quad (8)$$

$$E_{14} = C_{14}\Phi_{14}(\theta_s, \theta_n, \varphi_n). \quad (9)$$

Здесь $E_{12} = E_1/E_2$, $E_{13} = E_1/E_3$, $E_{14} = E_1/E_4$; $C_{12} = C_1/C_2$, $C_{13} = C_1/C_3$, $C_{14} = C_1/C_4$; $\Phi_{12} = \Phi_1/\Phi_2$, $\Phi_{13} = \Phi_1/\Phi_3$, $\Phi_{14} = \Phi_1/\Phi_4$.

В уравнениях (7)–(9) с высокой степенью точности можно исключить зависимость от энергии частицы в функции $\beta(W)$, взяв среднее значение энергии в исследуемом интервале энергий частицы.

При этом энергия частицы определится, например, из уравнения (3) подстановкой в него решения $\Phi_1(\theta_s, \theta_n, \varphi_n)$ при найденных (в результате решения обратной задачи для углов) углах, характеризующих событие:

$$W = E_1 R_s / C_1 \Phi_1(\theta_s, \theta_n, \varphi_n). \quad (10)$$

Отметим, что формула (10) определяет явно энергию частицы, завершая решение исходной обратной задачи.

Решая обратную задачу для нахождения углов, будем следовать работе [4], то есть использовать метод случайного поиска, но теперь уже рассматривая три независимых уравнения (7)–(9). Как и в работе [4], искомое решение находится как среднее по ансамблю кандидатов с минимальной невязкой, то есть событие со средними значениями угловых параметров θ_s , θ_n , φ_n , при этом уравнение (10) определяет энергию частицы однозначно.

Точность определения энергии первичной частицы установим с помощью калибровочной процедуры [4], позволяющей найти зависимость от энергии ошибок определения углов, определяющих событие, принимаемое за решение обратной задачи. В данной задаче калибровка отличается от калибровки в работе [5] тем, что теперь ведётся случайный поиск только угловых параметров, а энергия частицы определяется однозначно по найденному решению для углов.

В этой работе для сравнения результатов для широкой полосы и четырёх полос метод случайного поиска для широкой полосы модифицируем следующим образом. Для четырёх полос мы находили искомое событие как решение, характеризующееся средними значениями всех углов. В работе [4] осреднение проводилось по ансамблю 30 кандидатов на решение с минимальными достаточно малыми невязками с помощью получающейся в результате использования случайного поиска гистограммы – распределения числа событий-кандидатов по энергии. Но это не вполне последовательно в силу того, что предполагаемый энергетический (дифференциальный) спектр КЛУВЭ в нашей области искомых энергий $W^{-4.2}$ [6] сильно зависит от энергии частицы, если экстраполяция на область больших энергий соответствует действительности. Из-за этого следует учесть, что полученная в результате отбора событий-кандидатов гистограмма должна быть модифицирована с учётом этого спектра. Осреднение с помощью модифицированного распределения в ансамбле событий-кандидатов изменяет средние значения углов и энергии события, принимаемого за решение обратной задачи, смещая их в область, соответствующую меньшим энергиям, и тем самым метод случайного поиска перестаёт быть полностью случайным.

Пересчитанные модифицированным методом результаты работы [4] для широкой полосы сильно изменятся по сравнению с результатами, приведёнными в работе [4]. Окончательно в настоящей работе мы предлагаем для широкой полосы именно модифицированный метод случайного поиска как физически более последовательный.

Приведём результаты для сравнения ошибок определения энергии частицы, найденных по калибровке, при решении этих двух обратных задач. График зависимостей абсолютных ошибок определения энергии частицы от энергии в двух случаях согласно калибровке для событий при заданных углах $\theta_s = 10^\circ$, $\theta_n = 80^\circ$, $\varphi_n = 10^\circ$ приведен для энергий частицы в интервале $(2 - 10) \cdot 10^{20}$ эВ на рис. 1. Из рис. 1 видно, что точность определения энергии частицы в случае 4-х полос (при использовании спектрального анализа) увеличивается значительно и растёт с ростом энергии частицы. Так, в минимуме при энергии $4 \cdot 10^{20}$ эВ увеличение точности при применении метода 4-х полос составляет 40% и доходит до 300% при энергии $9 \cdot 10^{20}$ эВ, то есть эффект спектрального анализа велик. Следует отметить, что калибровка показывает, что энергия частицы, найденная в результате решения обратной задачи, оказывается для всех энергий меньше, чем заданная калибровочная энергия. Это означает, что происходит систематическое занижение находимой энергии частицы.

Точность определения параметра как среднего значения, находимую с помощью процедуры калибровки, следует рассматривать как меру систематической ошибки метода, к которой должна быть добавлена статистическая ошибка метода, определяющаяся как среднее квадратическое отклонение параметра от его среднего значения по ансамблю событий-кандидатов.

График зависимостей абсолютных статистических ошибок определения энергии частицы от энергии в двух случаях согласно калибровке для событий при заданных углах $\theta_s = 10^\circ$, $\theta_n = 80^\circ$, $\varphi_n = 10^\circ$ приведен для энергий частицы в интервале $(2 - 10) \cdot 10^{20}$ эВ на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что статистические ошибки для случая 4-х полос существенно меньше, чем для одной широкой полосы. Из рис. 1 и рис. 2 видно, что как систематические, так и статистические абсолютные ошибки малы при малых энергиях и значительно больше – для больших. Поскольку точность найденного здесь способа нахождения решения достаточно хороша, мы не будем дополнительно строить вероятностное решение способом, предложенным в работе [4].

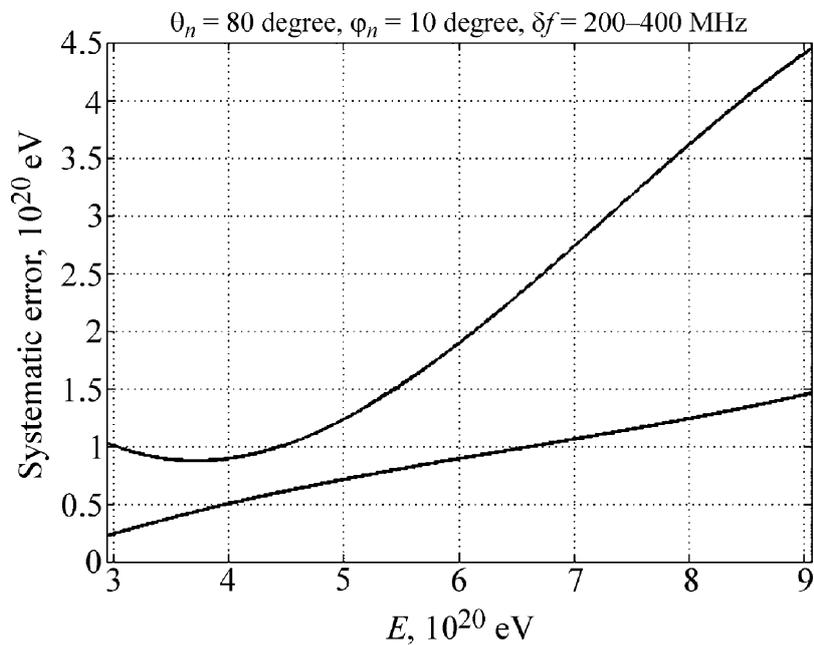


Рис. 1: Зависимости абсолютных систематических ошибок восстановления энергии событий от энергии частицы согласно калибровке для событий при заданных углах $\theta_s = 10^\circ$, $\theta_n = 80^\circ$, $\varphi_n = 10^\circ$ для анализа в одной широкой полосе частот (верхняя кривая) и в 4-х полосах (нижняя кривая).

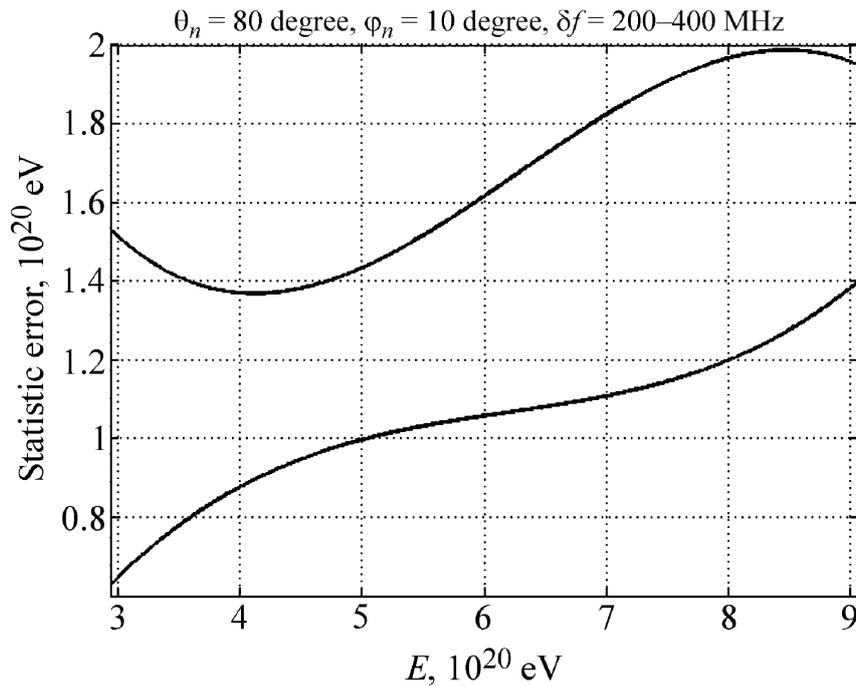


Рис. 2: Зависимости абсолютных статистических ошибок восстановления энергии событий от энергии частицы для событий при заданных углах $\theta_s = 10^\circ$, $\theta_n = 80^\circ$, $\varphi_n = 10^\circ$ для задачи в случае одной широкой полосы и 4-х полос частот. Верхняя кривая соответствует случаю одной широкой полосы частот, а нижняя – случаю 4-х полос.

В заключение отметим, что спектральный анализ зарегистрированного сигнала, дающий информацию о сигнале в четырёх полосах частот, позволяет увеличить точность решения обратной задачи в восстановлении энергии частицы в среднем для систематических ошибок в 2–3 раза, а для статистических – в 1.6 раза по сравнению с ранее рассмотренным случаем использования информации об амплитуде сигнала только в одной широкой полосе [4]. Здесь идёт речь только об ошибках решения обратной задачи без учёта влияния шумов при реальной регистрации амплитуды сигнала, ошибки от которых при малых амплитудах весьма велики, например, при отношении сигнал/шум, равном четырём, относительные ошибки определения амплитуды 25%.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН “Физика высоких энергий и нейтринная астрофизика”.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. A. Tsarev, J. Rad. Phys. Chem. **75**, 805, 988 (2006).

- [2] Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, К. М. Пичхадзе и др., *Космические исследования* **44**(1), 1 (2006).
- [3] Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, К. М. Пичхадзе и др., *ДАН* **406**(3), 327 (2006).
- [4] Г. А. Гусев, Ч. Маунг, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **42**(6), 37 (2015).
- [5] A. Letessier–Selvon, *Braz. J. of Phys.* **44**(5), 560 (2014).

Поступила в редакцию 24 ноября 2015 г.