

УДК 538.945

НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕГОСЯ ТОКА НА БЕСКОНЕЧНУЮ ЦЕПОЧКУ ВИХРЕЙ АБРИКОСОВА–ДЖОЗЕФСОНА

А. В. Зверев, В. П. Силин

В рамках резистивной модели для джозефсоновских переходов с большой критической плотностью тока рассмотрена точно решаемая модель воздействия периодического тока на переход, содержащий цепочку вихрей Абрикосова–Джозефсона. Точное описание такого воздействия позволило установить релаксацию состояния вихрей к периодически изменяющемуся во времени состоянию с периодом осциллирующего тока. Установлен нелинейный резонанс таких параметров цепочки вихрей, как амплитуда колебаний положения вихрей в цепочке и амплитуда колебаний ширины отдельных вихрей, составляющих цепочку, с частотой периодического тока. Наконец, установлена резонансная перестройка магнитного поля цепочки вихрей от ярко выраженной структуры последовательности отдельных вихрей к плавной гармонической зависимости магнитного поля вдоль длины джозефсоновского перехода.

Обычная электродинамика джозефсоновских переходов предполагает, что характерный масштаб рассматриваемых структур велик по сравнению с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. В случае если это не так, электромагнитные свойства перехода описывает нелокальная джозефсоновская электродинамика. Она описывает джозефсоновские переходы с относительно большой критической плотностью тока

$$j_c \gg j_0 [A/cm^2] \equiv \frac{\hbar c^2}{16\pi |e| \lambda^3}. \quad (1.1)$$

Здесь j_c – критическая плотность тока, $|e|$ – заряд электрона, λ – лондоновская длина, c – скорость света и \hbar – постоянная Планка. В пределе (1.1) динамика изменения состояния джозефсоновского перехода описывается уравнением для разности фаз $\varphi(z, t)$ куперовских пар по разные стороны перехода [1 – 3]

$$\sin \varphi + t_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{l}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{z - z'} \frac{\partial \varphi(z', t)}{\partial z'} + \gamma. \quad (1.2)$$

Здесь

$$\frac{1}{\omega_j^2} = \frac{\hbar C_s}{2|e|j_c} = \frac{\hbar \epsilon}{16\pi|e|dj_c}, \quad t_0 = \frac{\hbar}{2|e|j_c R_s}, \quad l = \frac{\lambda_j^2}{\lambda} = \frac{\hbar c^2}{16\pi j_c \lambda^2}, \quad \gamma(t) = \frac{j(t)}{j_c}, \quad (1.3)$$

$2d$ – ширина перехода, C_s , R_s – емкость и сопротивление единицы площади контакта, ϵ – диэлектрическая проницаемость, λ_j – джозефсоновская длина. Из (1.3) видно, что характерный пространственный масштаб изменения разности фаз – l в пределе (1.1) существенно меньше λ . В случае, когда

$$C_s \ll \frac{\Phi_0}{2\pi j_c R_s},$$

где Φ_0 – квант магнитного потока, реализуется так называемая резистивная модель, когда в (1.2) можно пренебречь второй производной по времени и когда имеем

$$\sin \varphi + t_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{z - z'} \frac{\partial \varphi(z', t)}{\partial z'} + \gamma. \quad (1.4)$$

Это уравнение положено в основу дальнейшего рассмотрения.

В работах [1, 3] было получено решение уравнения (1.4), описывающее стационарный покоящийся уединенный вихрь Абрикосова–Джозефсона. Это 2π -кинк, имеющий размер l . В [4], на основании уравнения (1.4), рассматривалась релаксация размера подобного вихря, в [5] изучалась одновременная релаксация однородной составляющей фазы, размера и положения вихря Абрикосова–Джозефсона. В работах [6, 7] обсуждалось воздействие на уединенный вихрь периодического тока ступенчатого вида. В [7], в частности, описаны резонансы частоты тока и внутренней частоты джозефсоновского перехода.

В [8] было получено периодическое решение уравнения (1.4), описывающее движущуюся с постоянной скоростью периодическую мультивихревую структуру со средним магнитным полем H и пространственным периодом

$$L = \frac{\Phi_0}{4\pi(\lambda + d)H}. \quad (1.5)$$

Такая структура получила название цепочки вихрей Абрикосова–Джозефсона. В [9] рассматривался нестационарный релаксационно-колебательный режим установления бегущей цепочки вихрей, находящейся под действием постоянного тока $\gamma(t) = \gamma_0$. Это рассмотрение проводилось в условиях, когда параметры цепочки близки к стационарным значениям. Такой режим характеризуется декрементом затухания Λ и частотой Ω .

$$\Lambda = (t_0)^{-1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \gamma_0^2 + \left(\frac{l}{L} \right)^2 + \sqrt{\left(1 - \gamma_0^2 + \left(\frac{l}{L} \right)^2 \right)^2 + 4\gamma_0^2 \left(\frac{l}{L} \right)^2} \right)}, \quad (1.6)$$

$$\Omega = (t_0)^{-1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \gamma_0^2 - \left(\frac{l}{L} \right)^2 + \sqrt{\left(1 - \gamma_0^2 + \left(\frac{l}{L} \right)^2 \right)^2 + 4\gamma_0^2 \left(\frac{l}{L} \right)^2} \right)}. \quad (1.7)$$

В данной работе решается задача описания воздействия на цепочку вихрей периодического тока ступенчатого вида (рис. 1)

$$\gamma(t) = \gamma_0 \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right). \quad (1.8)$$

В силу того, что Ω и Λ не зависят от знака плотности тока γ_0 , можно утверждать, что эти величины являются внутренней частотой и внутренним декрементом затухания для цепочки вихрей, подвергающейся воздействию тока (1.8). При этом, так как воздействующий ток обладает периодом T , то возможно возникновение резонансов, когда T равен или кратен $2\pi/\Omega$. Возможность проявления таких резонансов, как показано ниже, зависит от соотношения между Ω и Λ . Графики зависимостей Λ и Ω от γ_0 изображены на рис. 2.

Видно, что при плотностях тока больших критической плотности тока ($\gamma_0 > 1$) частота Ω оказывается большей декремента затухания, что открывает возможность для проявления указанных выше резонансов. В задачу данной работы входит исследование этих резонансов.

Решение уравнений, описывающих цепочку вихрей. Для решения поставленной в начале статьи задачи необходимо решить уравнение (1.4), описывающее состояния джозефсоновского перехода. Для бесконечной цепочки вихрей решение определяется соотношением (ср. [9]):

$$\varphi(z, t) = \theta(t) + \pi + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{z+z_0(t)}{L}}{\operatorname{th} \left(\frac{\alpha(t)}{2} \right)} \right). \quad (2.1)$$

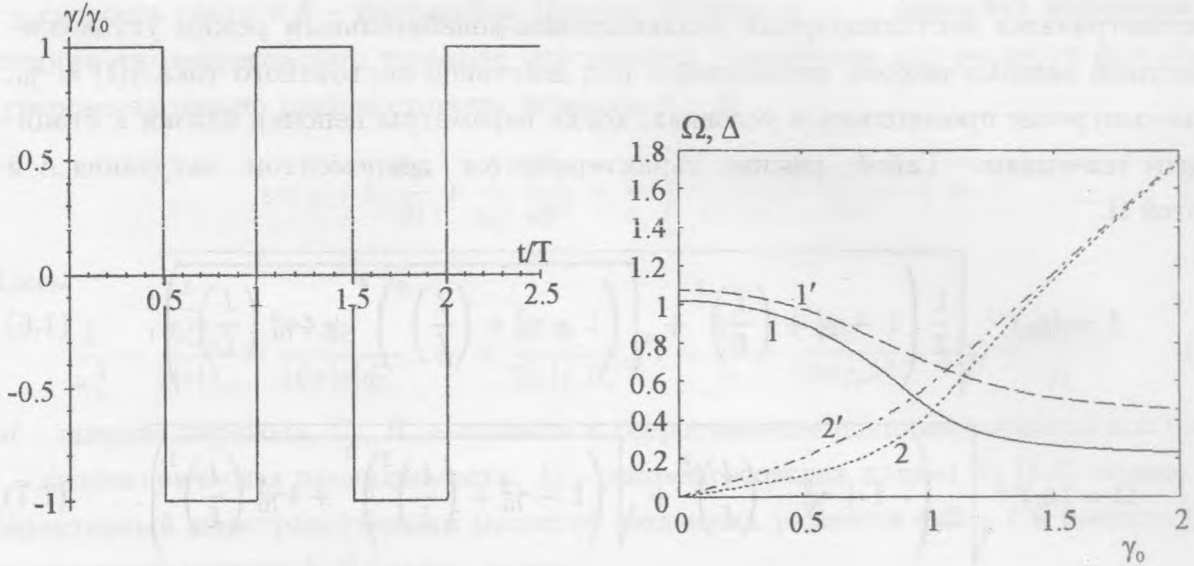


Рис. 1. График зависимости тока γ от t/T .

Рис. 2. Графики зависимости величин Ω и Δ от амплитуды плотности тока γ_0 для различных значений параметра l/L . Величина Δ изображается кривыми 1 и 1', которые отвечают $l/L = 0.2$ и $l/L = 0.4$ соответственно. Величина Ω изображена кривыми 2 и 2', отвечающим $l/L = 0.2$ и $l/L = 0.4$.

Отсюда видно, что динамика цепочки вихрей представляет собой динамику изменения трех ее характеристик, а именно $\theta(t)$ – однородной составляющей разности фаз, $\alpha(t)$ – размера вихря, представляющего собой элемент цепочки, и $z_0(t)$ – пространственного положения цепочки. Зависимость этих величин от времени определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \gamma - \sin \theta \operatorname{ch} \alpha, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{l}{L} - \cos \theta \operatorname{sh} \alpha, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{L} \frac{dz_0}{d\tau} = \sin \theta \operatorname{sh} \alpha. \quad (2.4)$$

Здесь τ – безразмерное время, равное t/t_0 . Видно, что уравнения (2.2) и (2.3) описывают взаимное влияние величин θ и α , а (2.4) – влияние θ и α на положение z_0 .

Система взаимосвязанных уравнений (2.2), (2.3) эквивалентна одному комплексному уравнению для величины $\beta = \exp(i\theta - \alpha)$

$$2 \frac{d\beta}{d\tau} + (\beta^2 - 1) = 2i\beta\delta, \quad (2.5)$$

где $\delta(\tau)$ – комплексная величина, равная

$$\delta(\tau) = \gamma(\tau) + i \frac{l}{L}. \quad (2.6)$$

Величина $\gamma(t)$ принимается ниже периодической функцией, которая имеет вид чередующихся прямоугольных импульсов (1.8) (см. рис. 1):

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad nT < t < nT + T/2 \quad (2.7)$$

$$\gamma(t) = -\gamma_0, \quad nT + T/2 < t < nT + T, \quad (2.8)$$

где n – любое целое неотрицательное число.

На первом полупериоде ($0 < \tau < T/2t_0$) $\gamma(\tau)$ постоянна и равна γ_0 . Соответственно $\beta(t)$ находится элементарным интегрированием уравнения (2.5):

$$\beta(t) = \frac{\beta_\gamma(\beta_\gamma\beta(0) + 1) + (\beta(0) - \beta_\gamma)e^{\Gamma t}}{(\beta_\gamma\beta(0) + 1) - \beta_\gamma(\beta(0) - \beta_\gamma)e^{\Gamma t}}. \quad (2.9)$$

В этой формуле Γ – комплексная величина:

$$\Gamma = -\Lambda + i\Omega \operatorname{sgn} \gamma, \quad (2.10)$$

где Λ и Ω – действительные величины, выражающиеся формулами (1.6) и (1.7). Величина β_γ определяется формулой

$$\beta_\gamma = i\delta_0 - \Gamma_0. \quad (2.11)$$

При этом

$$\delta_0 = \gamma_0 + i(l/L), \quad (2.12)$$

$$\Gamma_0 = -\Lambda + i\Omega. \quad (2.13)$$

Формулы (2.9) – (2.13) при $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$ соответствуют результатам, полученным в [9]. Стационарный режим, описывающий бегущую с постоянной скоростью цепочку вихрей, отвечает $\beta(0) = \beta_\gamma$. Процесс нестационарной релаксации к такому состоянию, описанный в [9], соответствует $\beta(0)$ близким к β_γ . Действительно, при этом (2.9) переходит в соотношение

$$\beta - \beta_\gamma \sim \exp(\Gamma t) = \exp(-\Lambda t + i\Omega t). \quad (2.14)$$

В предположении малости $|\beta - \beta_\gamma|$, выражения для α и θ , которые получаются из (2.14), совпадают с соответствующими выражениями работы [9]:

$$\Delta\theta \sim \Delta\alpha \sim \exp(-\Lambda t) \cos(\Omega t + \text{const}). \quad (2.15)$$

Здесь $\Delta\theta$ и $\Delta\alpha$ – отличие соответствующих величин от их стационарных значений.

Пусть в начале первого полупериода система находится в начальном состоянии $\beta(0)$, тогда, используя (2.9), можно найти $\beta(T/2)$, то есть в каком состоянии будет находиться система в конце первого полупериода. В течение второго полупериода ($T/2 < t < T$) $\gamma(t)$ постоянна и равна $-\gamma_0$. Решение в этой области имеет вид (2.9), где вместо $\beta(0)$ стоит $\beta(T/2)$, а вместо γ_0 стоит $-\gamma_0$. Используя это, находим состояние системы в конце второго полупериода.

$$\beta(T) = \frac{v_1\beta(0) + u}{u^*\beta(0) + v_2}, \quad (2.16)$$

где v_1, v_2 – действительные величины:

$$v_1 = (1 + \beta_\gamma^*\beta_\gamma)(\beta_\gamma^*\beta_\gamma + e^{(\Gamma_0 + \Gamma_0^*)T/2}) + (\beta_\gamma - \beta_\gamma^*)(\beta_\gamma e^{\Gamma_0^*T/2} - \beta_\gamma^* e^{\Gamma_0 T/2}) \quad (2.17)$$

$$v_2 = (1 + \beta_\gamma^*\beta_\gamma)(1 + \beta_\gamma^*\beta_\gamma e^{(\Gamma_0 + \Gamma_0^*)T/2}) + (\beta_\gamma - \beta_\gamma^*)(\beta_\gamma e^{\Gamma_0 T/2} - \beta_\gamma^* e^{\Gamma_0^*T/2}), \quad (2.18)$$

а u – комплексная величина, равная

$$u = (1 + \beta_\gamma^*\beta_\gamma)(\beta_\gamma^* - \beta_\gamma e^{(\Gamma_0 + \Gamma_0^*)T/2}) + (\beta_\gamma - \beta_\gamma^*)(\beta_\gamma^*\beta_\gamma e^{\Gamma_0 T/2} + e^{\Gamma_0^*T/2}). \quad (2.19)$$

Все вышеописанное может быть отнесено не только к первому периоду ($0 < t < T$), но и к последующим ($nT < t < (n+1)T, n = 1, 2, 3, \dots$). Поэтому любое решение будет определяться последовательностью β_n – значений β в начале n -того периода. При этом сама последовательность находится из рекуррентного соотношения, связывающего β_n и β_{n+1} :

$$\beta_{n+1} = \frac{v_1\beta_n + u}{u^*\beta_n + v_2}. \quad (2.20)$$

Это соотношение определяет общее решение уравнения (2.5). На отрезке $[nT, (n+1/2)T]$ это решение имеет вид

$$\beta(t) = \frac{\beta_\gamma(\beta_\gamma\beta_n + 1) + (\beta_n - \beta_\gamma)e^{\Gamma_0(t-nT)}}{(\beta_\gamma\beta_n + 1) - \beta_\gamma(\beta_n - \beta_\gamma)e^{\Gamma_0(t-nT)}}. \quad (2.20')$$

На отрезке $[(n+1/2)T, (n+1)T]$ оно имеет вид

$$\beta(t) = \frac{\beta_\gamma^*(\beta_\gamma^*\beta_{n1} + 1) + (\beta_{n1} - \beta_\gamma^*)e^{\Gamma_0^*(t-nT-T/2)}}{(\beta_\gamma^*\beta_{n1} + 1) - \beta_\gamma^*(\beta_{n1} - \beta_\gamma^*)e^{\Gamma_0^*(t-nT-T/2)}}, \quad (2.20'')$$

где $\beta_{n1} = \beta((n + 1/2)T)$ находится из (2.20').

Среди всех решений, определяемых (2.20), (2.20'), (2.20''), имеются периодические решения с периодом T ; они получаются, если подчинить β_n условию

$$\beta_{n+1} = \beta_n. \quad (2.21)$$

Отсюда находим для периодического решения

$$\beta_n = \beta_{per1,2} \equiv (f \pm \sqrt{1 + f^2}) \frac{u}{|u|}, \quad (2.22)$$

где

$$f = \frac{v_1 - v_2}{2|u|}. \quad (2.23)$$

При этом само решение имеет вид

$$\beta(t) = \frac{\beta_\gamma(\beta_\gamma\beta_{per1,2} + 1) + (\beta_{per1,2} - \beta_\gamma)e^{\Gamma_0(t-nT)}}{(\beta_\gamma\beta_{per1,2} + 1) - \beta_\gamma(\beta_{per1,2} - \beta_\gamma)e^{\Gamma_0(t-nT)}} \quad (2.24)$$

при $(nT < t < nT + T/2)$;

$$\beta(t) = \frac{\beta_\gamma^*(\beta_\gamma^*\beta_{per1,2}^* + 1) + (\beta_{per1,2}^* - \beta_\gamma^*)e^{\Gamma_0^*(t-nT-T/2)}}{(\beta_\gamma^*\beta_{per1,2}^* + 1) - \beta_\gamma^*(\beta_{per1,2}^* - \beta_\gamma^*)e^{\Gamma_0^*(t-nT-T/2)}} \quad (2.25)$$

при $(nT + T/2 < t < nT + T)$. Для обсуждаемых периодических решений имеют место соотношения

$$\alpha\left(t + \frac{T}{2}\right) = \alpha(t) \quad (2.26)$$

$$\theta\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\theta(t). \quad (2.27)$$

Таким образом $\alpha(t)$ – периодическая функция с периодом $T/2$. Это означает, что размер вихря колеблется с удвоенной частотой по сравнению с однородной разностью фаз $\theta(t)$.

В дальнейшем понадобятся значения величин α и θ в начале каждого полупериода. Подставляя (2.17)–(2.19) в (2.22), (2.23), а также учитывая, что $\beta = \exp(i\theta - \alpha)$, получаем

$$\alpha(0) = \alpha(T/2) = \alpha_{per1,2} \equiv \operatorname{arcsch}\left(\pm\left(-\frac{F}{\sqrt{r}}\right)\right) \quad (2.28)$$

$$\theta(0) = -\theta(T/2) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{s}{c}\right). \quad (2.29)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s = \frac{\gamma_0}{\Lambda t_0} \left(\operatorname{ch} \frac{\Lambda T}{2} - \cos \frac{\Omega T}{2} \right) \quad (2.30)$$

$$c = \operatorname{sh} \frac{\Lambda T}{2} + \frac{\Omega}{\Lambda} \sin \frac{\Omega T}{2} \quad (2.31)$$

$$F = \sqrt{\frac{\gamma_0^2 - t_0^2 \Omega^2}{\gamma_0^2 + t_0^2 \Lambda^2}} \sin \frac{\Omega T}{2} - \frac{\Omega}{\Lambda} \sqrt{\frac{\gamma_0^2 + t_0^2 \Lambda^2}{\gamma_0^2 - t_0^2 \Omega^2}} \operatorname{sh} \frac{\Lambda T}{2} \quad (2.32)$$

$$r = s^2 + c^2. \quad (2.33)$$

Колебания положения вихря для описываемого периодического режима находятся из уравнения (2.4). Используя (2.5), легко получить

$$z_0(t) = z_0(0) + L \operatorname{Arg} \left(\frac{\delta - \Theta(t)}{\delta - \Theta(0)} \right) \quad (0 < t < T/2) \quad (2.34)$$

$$z_0(t) = z_0(0) + \Delta z_0 + L \operatorname{Arg} \left(\frac{\delta - \Theta(t)}{\delta - \Theta(0)} \right) \quad (T/2 < t < T), \quad (2.35)$$

где $\Theta = \theta + i\alpha$, а Δz_0 – амплитуда колебаний положения вихря,

$$\Delta z_0 = L \operatorname{Arg} \left(\frac{\delta_0 - \Theta(T/2)}{\delta_0 - \Theta(0)} \right). \quad (2.36)$$

Используя (2.28) и (2.29), получаем

$$\frac{\Delta z_0}{L} = \operatorname{Arctg} \left(\frac{\frac{1}{L}r + Fc}{\gamma_0 r - s\sqrt{r + F^2}} \right) - \operatorname{Arctg} \left(\frac{\frac{1}{L}r + Fc}{\gamma_0 r + s\sqrt{r + F^2}} \right). \quad (2.37)$$

Рассмотрим непериодические решения. Для всякого решения имеет место равенство

$$\beta(NT) = \beta_N,$$

где последовательность β_N определяется при помощи (2.20), исходя из заданного β_0 . Можно найти явный вид последовательности β_N . Будем последовательно находить β_N :

$$\beta_1 = \frac{a_1 \beta_0 + b_1}{c_1 \beta_0 + d_1} \equiv \frac{v_1 \beta_0 + u}{u^* \beta_0 + v_2}. \quad (2.38)$$

Далее

$$\beta_2 = \frac{a_2 \beta_0 + b_2}{c_2 \beta_0 + d_2} \equiv \frac{v_1 \beta_1 + u}{u^* \beta_1 + v_1}. \quad (2.39)$$

Формулы (2.38), (2.39) служат определениями величин $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$, $d_{1,2}$. По аналогии определяются a_N, b_N, c_N, d_N , для $N > 2$. Для величин a_2, b_2, c_2, d_2 , можно написать

$$\begin{cases} a_2 = v_1 a_1 + u c_1 \\ b_2 = v_1 b_1 + u d_1 \\ c_2 = u^* a_1 + v_2 c_1 \\ d_2 = u^* b_1 + v_2 d_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Очевидно, что для произвольного N имеют место аналогичные соотношения

$$\begin{cases} a_N = v_1 a_{N-1} + u c_{N-1} \\ b_N = v_1 b_{N-1} + u d_{N-1} \\ c_N = u^* a_{N-1} + v_2 c_{N-1} \\ d_N = u^* b_{N-1} + v_2 d_{N-1} \end{cases} \quad (2.41)$$

Через эти четыре последовательности определяется последовательность β_N ,

$$\beta_N = \frac{a_N \beta_0 + b_N}{c_N \beta_0 + d_N}. \quad (2.42)$$

Соотношения (2.41) можно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_N \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & u \\ u^* & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{N-1} \\ c_{N-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_N \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & u \\ u^* & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{N-1} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Для того, чтобы найти (a_N, c_N) и (b_N, d_N) , необходимо диагонализировать матрицу из (2.43), т.е. найти преобразование L такое, что

$$L \begin{pmatrix} v_1 & u \\ u^* & v_2 \end{pmatrix} L^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv A. \quad (2.44)$$

При этом соотношения (2.43) перейдут в

$$L \begin{pmatrix} a_N \\ c_N \end{pmatrix} = A L \begin{pmatrix} a_{N-1} \\ c_{N-1} \end{pmatrix}; \quad L \begin{pmatrix} b_N \\ d_N \end{pmatrix} = A L \begin{pmatrix} b_{N-1} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

В силу диагональности A получаем

$$L \begin{pmatrix} a_N \\ c_N \end{pmatrix} = A^{N-1} L \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{N-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{N-1} \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$L \begin{pmatrix} b_N \\ d_N \end{pmatrix} = A^{N-1} L \begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{N-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{N-1} \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} a_N \\ c_N \end{pmatrix} = (L^{-1} A^{N-1} L) \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_N \\ d_N \end{pmatrix} = (L^{-1} A^{N-1} L) \begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Искомая матрица L равна

$$L = \Delta \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{per1} \\ -1 & \beta_{per2} \end{pmatrix} \quad \Delta = \frac{1}{\beta_{per1} - \beta_{per2}}. \quad (2.49)$$

При этом

$$\lambda_{1,2} = \frac{v_1 + v_2 \pm \sqrt{(v_1 + v_2)^2 + 4(v_1 v_2 - u^* u)}}{2}. \quad (2.50)$$

Используя вышеописанное, получаем

$$\begin{aligned} \beta_N = & \\ = & \frac{(\beta_{per1}(v_1 - \beta_{per2} u^*) + \beta_{per2}(\beta_{per1} u^* - v_1) \xi^{N-1}) \beta_0 + \beta_{per1}(u - \beta_{per2} v_2) + \beta_{per2}(\beta_{per1} v_2 - u) \xi^{N-1}}{((v_1 - \beta_{per2} u^*) + (\beta_{per1} u^* - v_1) \xi^{N-1}) + (u - \beta_{per2} v_2) + (\beta_{per1} v_2 - u) \xi^{N-1}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь $\xi = \lambda_2/\lambda_1$. Формула (2.51) описывает любые непериодические решения. Нетрудно убедиться, что $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, следовательно, при $N \rightarrow \infty$ величина ξ^{N-1} стремится к нулю. Отсюда следует, что $\beta_N \rightarrow \beta_{per1}$. Таким образом получено, что все непериодические решения со временем стремятся к периодическому с $\beta_N = \beta_{per1}$. При этом приближительное время релаксации равно $-T \ln(\lambda_2/\lambda_1)$.

Итак, решение уравнений (2.2)–(2.4) дает следующие результаты: в зависимости от начального состояния системы имеется два типа решений, это периодические решения (2.24), (2.25), и оставшиеся непериодические решения, которые стремятся к одному из периодических, а именно, решению, характеризующемуся β_{per1} . В силу этого, дальнейшее рассмотрение свойств решений разумно производить именно для этого установившегося решения.

Резонансные свойства периодического режима. Перейдем к рассмотрению свойств установившегося периодического режима, описанного в предыдущем разделе.

Как упоминалось выше, при вынужденных колебаниях параметров перехода под воздействием внешнего периодического тока возможны резонансы. Такие резонансы наиболее ярко могут проявляться в условиях, когда частота внутренних колебаний превосходит декремент затухания ($\Omega \gg \Lambda$). Исходя из (1.6), (1.7), можно заключить, что это

возможно при

$$\gamma_0 \gg 1, \quad l/L \ll 1. \quad (3.1)$$

Действительно, при таких условиях соотношения (1.6) и (1.7) можно разложить по параметру $1/\gamma_0$ с точностью до поправок порядка $(1/\gamma_0)^2$:

$$\Omega = (t_0^{-1})\gamma_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\Lambda = (t_0^{-1})\frac{l}{L} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_0^2} \right). \quad (3.3)$$

Из этих соотношений видно, что безразмерная частота (Ωt_0) порядка γ_0 и существенно превосходит безразмерный декремент затухания (Λt_0) , который порядка (l/L) . Однако, в условиях (3.1), в силу (2.9), влияние затухания может все-таки сильно проявляться при больших значениях периода T . Для того, чтобы избежать этого, вместе с (3.1) в этом разделе примем условие

$$\frac{\Lambda T}{2} \ll 1. \quad (3.4)$$

Рассмотрим зависимость амплитуды колебаний положения цепочки вихрей от периода внешнего тока. Эта зависимость определяется формулой (2.37). В условиях (3.1), (3.4) она принимает вид

$$\Delta z_0 = L \operatorname{Arctg} f, \quad f = \frac{2\frac{l}{L} \sin^2 \frac{\Omega T}{4} \left(\sin \frac{\Omega T}{4} - \frac{\Omega T}{4} \cos \frac{\Omega T}{4} \right)}{\gamma_0^2 \left(\sin^2 \frac{\Omega T}{4} - \left(\frac{l}{L} \right)^2 \frac{1}{\gamma_0^2} \left(\frac{\Omega T}{4} \right)^2 \right)}. \quad (3.5)$$

Чтобы проанализировать зависимость Δz_0 от T , отметим, что второе слагаемое в знаменателе существенно меньше первого везде, кроме узких областей вокруг точек, в которых $\sin(\Omega T/4)$ равно нулю. Вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь при значениях T , принадлежащих области

$$T \in [2nT_\gamma + \xi, 2(n+1)T_\gamma - \xi] \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

где $T_\gamma = 2\pi/\Omega$, а $\xi = t_0(l/L)(1/\gamma_0^2)(n\Omega T_\gamma) \ll T_\gamma$. В каждой из областей (3.6) величина, стоящая под знаком Arctg , порядка $(l/L)\gamma_0^{-2} \ll 1$, следовательно, Δz_0 приблизительно равна πLk , где k – целое число, зависящее от номера отрезка n . Зависимость k от n определяется тем, как меняется Δz_0 на узких переходных отрезках $(2nT_\gamma - \xi, 2nT_\gamma + \xi)$. Проанализируем зависимость Δz_0 от T в этих областях. При изменении величины $\delta T = T - 2nT_\gamma$ от $-\xi$ до $-4\xi/\gamma_0$, f – функция под знаком Arctg , изменяется от 0 до $+\infty$,

следовательно, $\Delta z_0/L$ изменяется от πk до $\pi k + \pi/2$. Далее, при изменении δT от $-4\xi/\gamma_0$ до $4\xi/\gamma_0$, f изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, следовательно $\Delta z_0/L$ изменяется от $\pi k + \pi/2$ до $\pi k + 3\pi/2$ и, наконец, при изменении δT от $4\xi/\gamma_0$ до ξ , $\Delta z_0/L$ изменяется от $\pi k + 3\pi/2$ до $\pi k + 2\pi$. Таким образом в промежуточной области $(2nT_\gamma - \xi, 2nT_\gamma + \xi)$, т.е. при переходе от n к $n + 1$, Δz_0 увеличивается на $2\pi L$ и целое число k увеличивается на 2. Теперь для того, чтобы определить, как k зависит от n , необходимо знать $k(n = 0)$. Из (3.5) следует, что при $T \rightarrow 0$ величина Δz_0 стремится к нулю, следовательно, $k(n = 0) = 0$. Таким образом, можно заключить, что $k = 2n$.

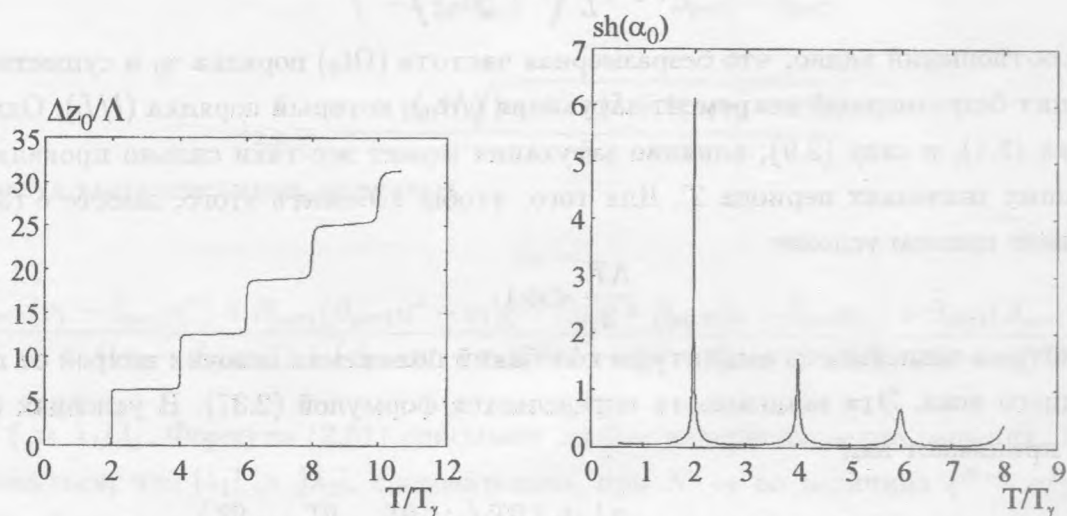


Рис. 3. График зависимости амплитуды колебаний цепочки визрей от периода воздействия в резонансном случае $\gamma = 3.5, l/L = 0.05$.

Рис. 4. График зависимости параметра $sh(\alpha_0)$ от T/T_γ в резонансном случае $\gamma = 3.5, l/L = 0.05$.

Суммируя вышесказанное, можно утверждать, что $\Delta z_0(T)$ имеет вид "лестницы", состоящей из областей, где Δz_0 практически постоянно, и узких скачков на $2\pi L$ в точках $2nT_\gamma, n = 1, 2, 3...$ С ростом n ширина скачков, равная $t_0(l/L)(1/\gamma_0^2)(n\Omega T_\gamma)$, увеличивается. Такая зависимость $\Delta z_0(T)$ имеет резонансный характер, так как узкие скачки величины Δz_0 находятся в точках, когда период воздействия T кратен внутреннему периоду $2\pi/\Omega$. Это отличается от нерезонансного случая ($\gamma_0 \ll 1, \Lambda \gg \Omega$), когда, как следует из (2.37), зависимость $\Delta z_0(T)$ – линейная:

$$\Delta z_0(T) = 2\pi L \frac{\Omega T}{2}. \tag{3.7}$$

На рис. 3 изображен график зависимости $\Delta z_0(T)$ для резонансного случая ($\gamma_0 = 5$). Отметим также, что с ростом периода резонансные скачки расплываются. Их ширина пропорциональна n , и приблизительно равна $(\pi n)(l/L)\gamma_0^{-2}$.

Для размера вихрей $\alpha(t)$ тоже имеет место резонансное поведение при изменении периода воздействия T , в условиях (3.1), (3.4). Рассматриваемый периодический режим характеризуется периодической зависимостью $\alpha(t)$. Чтобы продемонстрировать резонанс размера вихря, рассмотрим, для простоты, зависимость размера вихря $\alpha_0 \equiv \alpha(NT)$ в начале периода от T . Используя (2.28) для этой величины можно записать соотношение:

$$\text{sh}\alpha_0(T) = -\frac{F}{\sqrt{r}}. \quad (3.8)$$

В условиях (3.1), (3.4) это выражение переходит в

$$\text{sh}\alpha_0(T) = \frac{l}{L} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Omega T}{4} + \left(\frac{l}{L} \frac{1}{\gamma_0}\right)^4 \left(\frac{\Omega T}{4}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\Omega T}{4}\right)^2\right)}}. \quad (3.9)$$

В знаменателе правой части формулы (3.9) под знаком радикала имеется два слагаемых, и аналогично выражению для Δz_0 , вторым слагаемым можно пренебречь везде, кроме узких областей вокруг нулей $\sin(\Omega T/4)$, когда $T = 2nT_\gamma$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Там, где это слагаемое можно выкинуть, $\text{sh}(\alpha)$ порядка l/L и существенно меньше единицы. Вблизи $2nT_\gamma$ эта величина имеет резкий всплеск и достигает значения порядка $\gamma_0^2(l/L)^{-1}(\pi n)^{-1}$, что существенно больше единицы. Таким образом, в зависимости $\text{sh}(\alpha)$ от T имеет место последовательность резонансных пиков (см. рис. 4), амплитуда которых уменьшается с ростом периода. Ширина резонансных пиков увеличивается с ростом n подобно ширине резонансных скачков для Δz_0 .

Такое резонансное поведение отличается от поведения $\alpha_0(T)$ в нерезонансном случае малых токов ($\gamma_0 \ll 1$), когда величина $\text{sh}(\alpha)$ постоянна и равна l/L .

Резонансное поведение $\alpha_0(T)$ определяет резонансное поведение структуры магнитного поля в контакте. Как и при рассмотрении размера вихрей, рассмотрим для простоты величину $H_0(z) \equiv H(z, t = 0)$. Магнитное поле для цепочки вихрей имеет вид [8]:

$$H_0(z, T) = -H - \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \left(\alpha_0(T) - \ln \left(2 \left(\text{ch}\alpha_0(T) - \cos \frac{z + z_0(0)}{L} \right) \right) \right). \quad (3.10)$$

При периодах T , не близких к $2nT_\gamma$, имеет место равенство:

$$H_0(z) = -H - \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \left(\sin^2 \frac{z + z_0(0)}{2L} + \left(\frac{l}{L}\right)^2 \right). \quad (3.11)$$

График $\delta H(z) \equiv H_0(z) - (-H)$ изображен на рис. 5. Видно, что имеется последовательность узких пиков (вихрей), амплитуда которых δH_{max} равна $-(\Phi_0/4\pi\lambda^2)\ln(l/L)$. Отношение δH_{max} к H равно $-(L/\lambda)\ln(l/L)$ и, может быть порядка единицы.

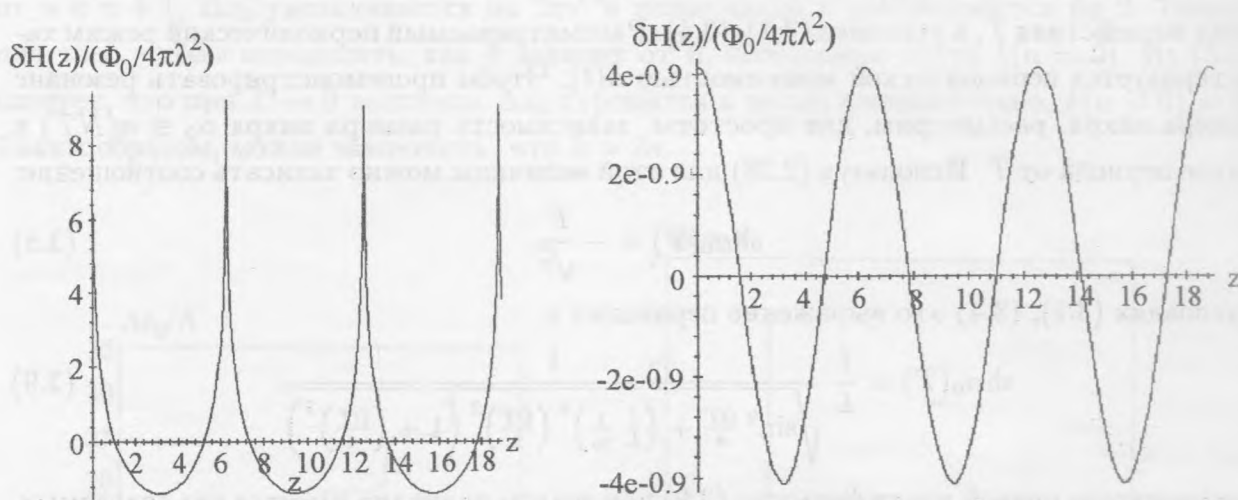


Рис. 5. График зависимости величины $\delta H(z)/(\Phi_0/4\pi\lambda^2)$ от z при $\gamma_0 = 0.5$, $l/L = 0.1$, при T , далеких от резонансных значений $2nT_\gamma$.

Рис. 6. График зависимости величины $\delta H(z)/(\Phi_0/4\pi\lambda^2)$ от z при $\gamma_0 = 0.5$, $l/L = 0.1$, при резонансном значении $T = 2nT_\gamma$.

При периодах T , близких к $2nT_\gamma$, картина магнитного поля резко меняется. В этом случае

$$H_0(z) = -H - \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \left(\frac{l}{L}\right) \frac{1}{\gamma^2} \cos \frac{z + z_0(0)}{L}. \quad (3.12)$$

Зависимость $\delta H(z)$ (рис. 6) в этом случае представляет собой гармонические колебания с амплитудой $(\Phi_0/4\pi\lambda^2)(l/L)/\gamma_0^2$, которая существенно меньше H . То есть магнитное поле имеет структуру, при которой вихрей нет. Таким образом, при приближении T к резонансному значению структура магнитного поля переходит от вихревой (рис. 5), к структуре, представляющей собой малые гармонические колебания при изменении z (рис. 6).

Диссипативные потери цепочки вихрей. Для рассмотрения диссипативных потерь воспользуемся формулой для напряжения на джозефсоновском контакте:

$$V = -\frac{\hbar}{2|e|} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Производная от разности фаз имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\frac{1}{L} \frac{dz_0(t)}{dt} \operatorname{sh}(\alpha(t)) - \frac{d\alpha(t)}{dt} \sin\left(\frac{z-z_0(t)}{L}\right)}{\operatorname{ch}(\alpha(t)) - \cos\left(\frac{z-z_0(t)}{L}\right)}. \quad (4.2)$$

Для описываемых решений эта величина периодически зависит от времени, причем период равен T . Зависимость от z также периодическая. Ее период равен $2\pi L$. Усредненное по пространственному периоду напряжение определяется формулой:

$$V = -\frac{\hbar}{2e} \left(\frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{1}{L} \frac{dz_0(t)}{dt} \right) = -\frac{\hbar}{2e} \left(\gamma(t) - \operatorname{Im} \frac{1}{\beta(t)} \right). \quad (4.3)$$

В последней формуле $\beta(t)$ определяется формулами (2.18) и (2.19).

Диссипативные потери перехода обычно [5 - 7] описываются при помощи передаваемой контакту мощности тока

$$Q = \int j(t)V(z,t)dz.$$

Будем рассматривать усредненную по времени мощность, передаваемую одному периоду цепочки длиной $2\pi L$.

$$Q = \frac{\hbar j_c}{2|e|T} \int_0^T dt \gamma(t) \int_0^{2\pi L} dz \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.2) в (4.4), получаем:

$$Q = Q_{ohm} \frac{2t_0}{T\gamma_0} \left(2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{s}{c} \right) + \operatorname{Arctg} \left(\frac{\frac{1}{L}r + Fc}{\gamma r - s\sqrt{r + F^2}} \right) - \operatorname{Arctg} \left(\frac{\frac{1}{L}r + Fc}{\gamma r + s\sqrt{r + F^2}} \right) \right). \quad (4.5)$$

В этой формуле:

$$Q_{ohm} = 4\pi L R_s j^2. \quad (4.6)$$

Рассмотрим мощность Q как функцию периода T/t_0 . При

$$T \ll 1/\Lambda, \quad T \ll 1/\Omega. \quad (4.7)$$

Имеет место соотношение:

$$Q = Q_{ohm}. \quad (4.11)$$

Таким образом, в пределе (4.7) мощность, выделяемая на контакте, представляет собой омические потери.

В обратном пределе:

$$T \gg 1/\Lambda, \quad T \gg 1/\Omega. \quad (4.12)$$

Величина Q становится константой:

$$Q = 2\pi Lj \frac{\hbar\Omega}{|e|} = Q_{ohm} \frac{\Omega t_0}{\gamma_0}. \quad (4.13)$$

Видно, что отличие диссипативных потерь в этом пределе от омических потерь определяется безразмерным множителем $(\Omega t_0)/\gamma_0$. Из формулы (1.7) следует, что этот множитель всегда меньше единицы (рис. 2). При $\gamma_0 \ll 1$ он приблизительно равен l/L , а при $\gamma_0 \gg 1$ практически равен единице. То есть при $\gamma_0 \ll 1$

$$Q = Q_{ohm} \frac{l}{L} = 2\pi l j^2 R_s.$$

Что отвечает омическим потерям в области занимаемой одним вихрем. А при $\gamma_0 \gg 1$

$$Q = Q_{ohm},$$

что соответствует омическим потерям на периоде цепочки.

Результат (4.13) можно объяснить, если заметить, что он совпадает с мощностью, которая выделяется в случае равномерно бегущей цепочки вихрей, находящейся под действием постоянного тока [9]. Действительно в этом случае имеет место формула:

$$\hbar\Omega = 2|e|V, \quad (4.14)$$

а из этой формулы и (4.4) следует (4.13). Поскольку в обсуждаемом пределе $T \gg 1/\Lambda$, а $1/\Lambda$ – это время релаксации решения (2.8), то есть время релаксации к равномерно бегущей цепочке, можно утверждать, что основная система находится именно в стационарном состоянии, когда выполнено (4.14).

Для того, чтобы указать на преимущество нашего рассмотрения, отметим, что в случае $l/L \ll 1$ выражение (4.5) представляет собой мощность, выделяемую уединенным вихрем (элементом цепочки), находящимся под действием ступенчатого тока (2.7). Такое воздействие рассматривалось в [6, 7]. Первое слагаемое (4.5) соответствует Q_1 – величине, которая в [6, 7] определяется как однородная мощность, а сумма второго и третьего слагаемых соответствуют Q_2 из [6, 7].

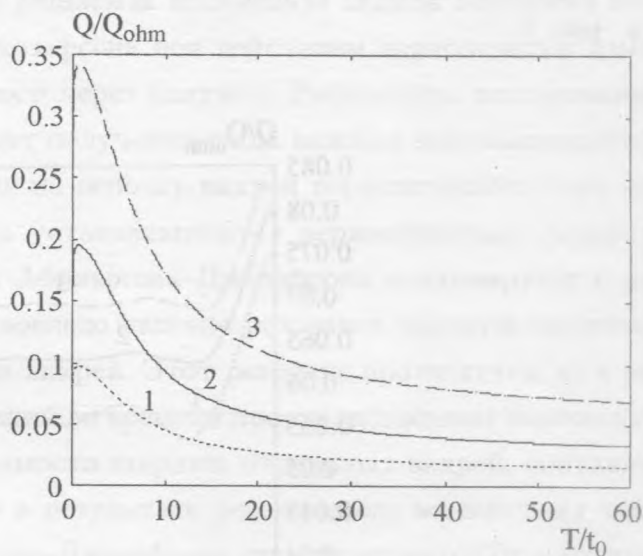
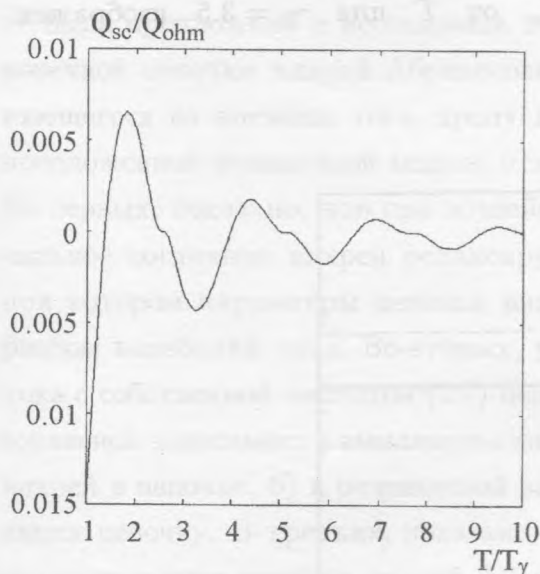


Рис. 7. График зависимости величины вклада в мощность диссипативных потерь сверхпроводящего тока Q_{sc} от T/T_γ в резонансном случае $\gamma = 3.5$, $l/L = 0.05$.

Рис. 8. Графики зависимости $Q(T/t_0)$ для различных значений параметров γ_0 и l/L . На рисунке изображены кривые, отвечающие параметру $l/L = 0.1$ и параметру $\gamma_0 = 0.2$ (кривая 1), $\gamma_0 = 0.4$ (кривая 2), $\gamma_0 = 0.7$ (кривая 3).

Рассмотрим зависимость Q от T в резонансных условиях (3.1), (3.4). Разлагая выражение (4.5) по малому параметру $1/\gamma_0$, оставляя слагаемые порядка $(1/\gamma_0^2)$, получаем:

$$Q = Q_{ohm} \frac{2t_0}{\gamma_0 T} \left(\frac{\Omega T}{2} + \frac{1}{\gamma_0^2} \sin \frac{\Omega T}{4} \frac{2 \frac{l}{L} \sin \frac{\Omega T}{4} + \left(\sqrt{\sin^2 \frac{\Omega T}{4} + \left(\frac{l}{L} \right)^2 \left(\frac{\Omega T}{4} \right)^2} - \left(\frac{l}{L} \right) \left(\frac{\Omega T}{4} \right) \right) \cos \frac{\Omega T}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Omega T}{4} + \left(\frac{l}{L} \right)^2 \left(\frac{\Omega T}{4} \right)^2 + \left(\frac{l}{L} \right) \left(\frac{\Omega T}{4} \right)} \right) \quad (4.15)$$

При этом учитывались соотношения (3.2), (3.3). При $\Omega T/4 \gg (l/L)^{-1}$ формула (4.15) переходит в простое соотношение:

$$Q = Q_{ohm} \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\sin^2 \frac{\Omega T}{4}}{\left(\frac{\Omega T}{4} \right)^2} \right) \equiv Q_{ohm} + Q_{sc}. \quad (4.16)$$

Вклад сверхпроводящего тока в (4.16) дается относительно малым вторым слагаемым,

которое при увеличении ΩT осциллирует с периодом 8π и убывает обратно пропорционально квадрату $\Omega T/4$. График зависимости Q_{sc} от T для $\gamma_0 = 3.5$ изображен на рис. 7.

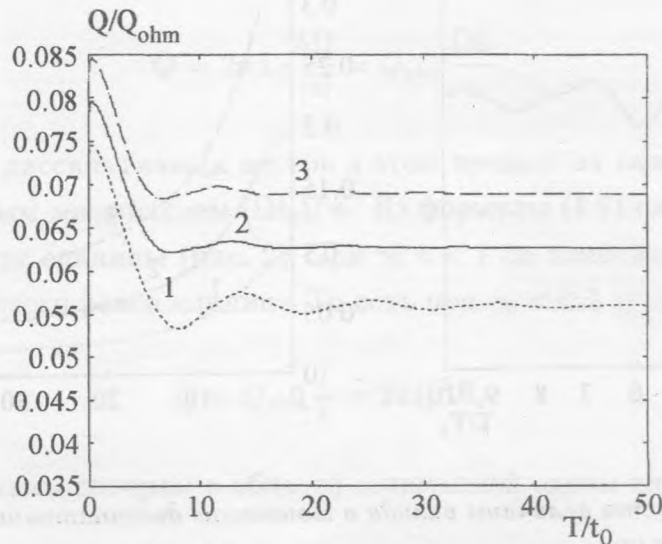


Рис. 9. Графики зависимости $Q(T/t_0)$ для различных значений параметров γ_0 и l/L . На рисунке изображены кривые, отвечающие параметру $l/L = 0.1$ и параметру $\gamma_0 = 1.5$ (кривая 1), $\gamma_0 = 1.6$ (кривая 2), $\gamma_0 = 1.7$ (кривая 3).

Графики зависимости Q от T/t_0 приведены на рис. 8 и рис. 9. На рис. 8 изображены три кривые, отвечающие параметру l/L , равному 0.1 и трем различным параметрам γ_0 , меньшим единицы.

Видно, что все кривые имеют схожий вид, а именно, вначале Q возрастает, достигая своего максимального значения, после чего Q плавно спадает и выходит на константу. Такая плавная зависимость объясняется тем, что при указанных выше значениях параметров Ω оказывается меньшим чем Λ (рис. 2). Поэтому в (4.5) проявляют себя только "плавные" компоненты ($\text{sh}\{\text{ch}\}(\Lambda T/2)$). На рис. 9 изображены графики зависимости $Q(T/t_0)$ при $l/L = 0.1$ и трех значений γ_0 , больших единицы.

В этом случае, в противоположность рис. 6, $\Omega > \Lambda$, и поэтому, наряду с плавной зависимостью, оказывают также влияние "колеблющиеся" компоненты ($\sin\{\cos\}(\Omega T/2)$). Влияние таких компонент рассмотрено выше для случая больших токов ((4.14), (4.15)). На рис. 9 имеют место малые затухающие колебания, подобные рис. 7 на фоне плавной зависимости, подобной рис. 8.

Подводя итог всему вышесказанному следует подчеркнуть, что в настоящей работе была предложена и исследована точно решаемая нелинейная модель поведения бесконечной цепочки вихрей Абрикосова–Джозефсона под действием периодически изменяющегося во времени тока, пропускаемого через контакт. Результаты исследования предложенной нелинейной модели отвечают получению ряда важных закономерностей. Во-первых, показано, что при воздействии на цепочку вихрей периодического тока начальное состояние вихрей релаксирует к установившемуся периодическому режиму, при котором параметры цепочки вихрей Абрикосова–Джозефсона осциллируют с периодом колебаний тока. Во-вторых, установлено явление резонанса частоты внешнего тока с собственной частотой (1.7) цепочки вихрей. Этот резонанс проявляется: а) в резонансной зависимости амплитуды колебаний во времени пространственных положений вихрей в цепочке, б) в резонансной зависимости ширины отдельных вихрей, составляющих цепочку. В-третьих, показано, что в результате резонансного воздействия тока магнитное поле цепочки вихрей Абрикосова–Джозефсона перестраивается от картины последовательности сравнительно ярко выраженных уединенных вихрей в нерезонансном случае к случаю гармонической пространственной зависимости магнитного поля в резонансном случае, когда сколько-нибудь выраженных нелинейных вихрей нет.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 00-02-16076), Научного совета по сверхпроводимости (задание "Вихри Абрикосова–Джозефсона") и при Государственной поддержке ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лапир Г. М., Лихарев К. К., Маслова Л. А., Семенов В. К. ФНТ, **1(10)**, 1253 (1975).
- [2] Алиев Ю. М., Силин В. П., Урюпин С. А. Сверхпроводимость: физика, химия, техника. **5(2)**, 228 (1992).
- [3] Gurevich A. Phys. Rev. B, **46**, 3187 (1992).
- [4] Силин В. П. Письма в ЖЭТФ, **57(3)**, 187 (1993).
- [5] Gurevich A. Physica C, **243**, 192 (1995).
- [6] Кузора И. В., Силин В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 4, 44 (1998).
- [7] Зверев А. В. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11, 17 (1999).
- [8] Силин В. П. Письма в ЖЭТФ, **60(6)**, 442 (1996).

[9] С и л и н В. П. ЖЭТФ, 112, N 4(10), 1396 (1997).

Поступила в редакцию 29 марта 2001 г.