УДК 531.51

ГРАВИТАЦИЯ ПО ТЕОРИИ ИСТОЧНИКОВ

А. И. Никишов

Метрика сферически симметричного шара идеальной несжимаемой жидкости рассматривается в G^2 приближении с помощью уравнений теории источников. Использование интегральных уравнений этой теории дает наружное решение, содержащее информацию об источнике и его радиусе b в членах, пропорциональных G^2.

Ключевые слова: метрика, G^2 приближение, теория источников.

Используя теорию источников, находится метрика гравитирующего шара радиуса b несжимаемой жидкости. Неожиданно оказывается, что в наружном решении имеется член, зависящий от радиуса шара, тогда как согласно теореме Биркгоффа наружное решение ничего не знает о свойствах источника.

Внутреннее решение. Используются следующие обозначения:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)} + \cdots, \quad h_{ik}^{(n)} \sim G^n, \quad \eta_{ik} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1), \quad \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} = h_{,\alpha},$$

$$\bar{h}_{ik}^{(n)} = h_{ik}^{(n)} - \frac{1}{2}\eta_{ik}h^{(n)} \quad i,k = 0,1,2,3, \quad h^{(n)} = h_{,\alpha\alpha}^{(n)} - h_{00}^{(n)}, \quad \alpha,\beta = 1,2,3. \tag{1}$$

В первом приближении теории возмущений в калибровке Гильберта $\bar{h}_{\alpha\beta,\alpha}^{(n)} = 0$ имеем

$$h_{ik}^{(1)}(m', r) = -2\phi(m', r)\delta_{ik}, \quad \bar{h}_{ik}^{(1)} = -4\phi(m', r)\delta_{0i}\delta_{0k},$$

$$\phi(m', r) = \frac{m'G}{2b}\left(\frac{r^2}{b^2} - 3\right), \quad m' = \frac{4}{3}\pi b^3 \mu. \tag{2}$$

Здесь μ – плотность жидкости. Для функции $\bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r)$ в этой калибровке имеем дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r) = -16\pi G(T_{ik}^{(1)} + t_{ik}). \tag{3}$$

Это дифференциальная форма уравнения (17.6) в Гл. 3, §17 в [2], см. также [1]. Здесь $T_{ik}^{(1)}$ – тензор материи, t_{ik} – тензор, обусловленный 3-гравитонным взаимодействием.

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: nikishov@td.lpi.ru.

В этой статье мы примем, что t_{ik} дается общей теорией относительности, см. Гл. 7, § 6 в [3].

В функциях, пропорциональных G^2, таких как $\bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r)$, $h_{ik}^{(2)}(m', r)$ и т.д. m' указывает только на то, что эти функции получены непосредственно из уравнений теории возмущений. В членах, пропорциональных G^2, в рассматриваемом приближении не имеет значения стоит ли в них m' или одетая масса $m = m'(1+3mG/b)$. Для области внутри шара имеем [1]

$$t_{00} = -\frac{3}{8\pi G}(\nabla\phi)^2 - 6\mu\phi = \frac{m^2G^2}{8\pi G b^4}\left(54 - \frac{21r^2}{b^2}\right), \quad T_{00}^{(1)} = 2\mu\phi = \frac{m^2G^2}{4\pi G b^4}\left(\frac{3r^2}{b^2} - 9\right), \quad (4)$$

$$T_{00}^{(1)} + t_{00} = \frac{m^2G^2}{8\pi G b^4}\left(36 - \frac{15r^2}{b^2}\right),$$

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} + t_{\alpha\beta} = \frac{m^2G^2}{8\pi G b^4}\left[\delta_{\alpha\beta}\left(-9 + \frac{4r^2}{b^2}\right) - \frac{2x_\alpha x_\beta}{b^2}\right]. \quad (5)$$

Покажем теперь, что $\bar{h}_{ik}^{(2)}$ определяется дифференциальным уравнением (3) с точностью до аддитивной константы c_0. Из (3) и (5) видно, что общий вид решения (3) должен иметь вид полинома четвертой степени по r, так как источник (5) – полином второй степени, а оператор ∇^2 понижает степень на 2. Итак

$$\bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r) = \left(\frac{mG}{b}\right)^2\left[\delta_{\alpha\beta}\left(c_0 + c_2\frac{r^2}{b^2} + c_4\frac{r^4}{b^4}\right) + c_5\frac{x_\alpha x_\beta}{b^2} + c_6\frac{r^2 x_\alpha x_\beta}{b^4}\right]. \quad (6)$$

Подставляя эту форму в (3) с учётом соотношений

$$\nabla^2 r^n = (n^2+n)r^{n-2}, \quad \nabla^2(r^n x_\alpha x_\beta) = 2r^n\delta_{\alpha\beta} + n(n+5)r^{n-2}x_\alpha x_\beta, \quad (7)$$

найдем

$$c_6 = \frac{2}{7}, \quad c_4 = -\frac{3}{7}, \quad 3c_2 + c_5 = 9. \quad (8)$$

Теперь вспомним, что наше решение должно удовлетворять условию Гильберта: $[\bar{h}_{\alpha\beta}^{(2)}]_{,\alpha} = 0$. Учитывая соотношения

$$(r^2)_{,\beta} = 2x_\beta, \quad (r^4)_{,\beta} = 4r^2x_\beta, \quad (x_\alpha x_\beta)_{,\alpha} = 4x_\beta, \quad (r^2x_\alpha x_\beta)_{,\alpha} = 6r^2x_\beta, \quad (9)$$

найдём из условия Гильберта, что $c_2+2c_5 = 0$. Отсюда, с помощью (8), получим $c_2 = \frac{18}{5}$, $c_5 = -\frac{9}{5}$. Таким образом, только c_0 осталось неопределённым. Его можно определить из условия непрерывности с внешним решением.

С другой стороны, используя интегральное уравнение теории источников, см. [1] и Гл. 3 §17 в [2]

$$\bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r) = 16\pi G \int d^4x' D_+(x - x')[T_{ik}^{(1)}(x') + t_{ik}(x')], \tag{10}$$

найдём

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(2)}(m', r) = \frac{m^2G^2}{b^2} \left[\delta_{\alpha\beta}\left(-5 + \frac{18}{5}\frac{r^2}{b^2} - \frac{3}{7}\frac{r^4}{b^4}\right) - \frac{9}{5}\frac{x_\alpha x_\beta}{b^2} + \frac{2}{7}\frac{r^2 x_\alpha x_\beta}{b^4}\right] = \bar{h}_{\alpha\beta}^{(2)}(m, r), \tag{11}$$

$$\bar{h}_{00}^{(2)}(m', r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left(\frac{51}{2} - 12\frac{r^2}{b^2} + \frac{3}{2}\frac{r^4}{b^4}\right), \tag{12}$$

Выражение (11) остаётся справедливым и при замене $m' \to m$, так как $\bar{h}_{\alpha\beta}^{(1)}(m', r) = 0$ в (2) при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, см. текст ниже формулы (16). Из (11) имеем

$$\bar{h}_{\alpha\alpha}^{(2)}(m', r) = \bar{h}_{\alpha\alpha}^{(2)}(m, r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left[-15 + 9\frac{r^2}{b^2} - \frac{r^4}{b^4}\right]. \tag{11a}$$

Далее, по решениям $\bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r)$ надо найти $h_{ik}^{(2)}(m', r)$:

$$h_{ik}^{(2)}(m', r) = \bar{h}_{ik}^{(2)}(m', r) - \frac{1}{2}\eta_{ik}\bar{h}(m', r), \quad \bar{h}^{(2)} = \bar{h}_{\alpha\alpha}^{(2)} - \bar{h}_{00}^{(2)} = -h^{(2)}. \tag{13}$$

Используя (11a) и (12), получим из второго уравнения в (13)

$$\bar{h}^{(2)}(m', r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left(-\frac{81}{2} + 21\frac{r^2}{b^2} - \frac{5}{2}\frac{r^4}{b^4}\right). \tag{14}$$

Из первого уравнения в (13), в котором i, k заменено на α, β, найдём

$$h_{\alpha\beta}^{(2)}(m', r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left[\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{61}{4} - \frac{69}{10}\frac{r^2}{b^2} + \frac{23}{28}\frac{r^4}{b^4}\right) - \frac{9}{5}\frac{x_\alpha x_\beta}{b^2} + \frac{2}{7}\frac{r^2 x_\alpha x_\beta}{b^4}\right]. \tag{15}$$

Аналогично из (13) при $i = k = 0$ получим

$$h_{00}^{(2)}(m', r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left(\frac{21}{4} - \frac{3}{2}\frac{r^2}{b^2} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{b^2}\right). \tag{16}$$

Кроме решений $h_{ik}^{(2)}(m', r)$, нам нужны решения $h_{ik}^{(2)}(m, r)$. Последние решения получаются из первых прибавлением к ним членов, пропорциональных G^2, из $h_{ik}^{(1)}(m', r)$, в которых m' заменено на $m\left(1 - 3\frac{mG}{b}\right)$, m – одетая масса, см. [1] или ф. (4.34) в [4]. Таким образом

$$h_{ik}^{(1)}(m', r) = \frac{m'G}{b}\delta_{ik}\left(3 - \frac{r^2}{b^2}\right) = h_{ik}^{(1)}(m, r) + \frac{m^2G^2}{b^2}\delta_{ik}\left(3\frac{r^2}{b^2} - 9\right),$$

$$m' = m\left(1 - 3\frac{mG}{b}\right). \tag{2a}$$

Аналогично из (2)

$$\bar{h}^{(1)}_{00}(m', r) = -4\phi(m', r) = \bar{h}^{(2)}_{00}(m, r) + \frac{m^2G^2}{b^2}\left(6\frac{r^2}{b^2} - 18\right). \tag{2b}$$

Уравнения в (13) остаются справедливыми и при замене $m' \to m$. Поэтому из второго уравнения в (13) с учётом (11a) и формулы (12a) (смотри её ниже формулы (19)) найдём

$$\bar{h}^{(2)}(m, r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left(-\frac{45}{2} + 15\frac{r^2}{b^2} - \frac{5}{2}\frac{r^4}{b^4}\right), \tag{17}$$

а из первого уравнения в (13) с учётом (11) и (17) получим

$$h^{(2)}_{\alpha\beta}(m, r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left[\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{25}{4} - \frac{39}{10}\frac{r^2}{b^2} + \frac{23}{28}\frac{r^4}{b^4}\right) - \frac{9}{5}\frac{x_\alpha x_\beta}{b^2} + \frac{2}{7}\frac{r^2 x_\alpha x_\beta}{b^4}\right]. \tag{18}$$

Точно также с учётом (12a) и (17) найдём

$$h^{(2)}_{00}(m, r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left(-\frac{15}{4} + \frac{3}{2}\frac{r^2}{b^2} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{b^2}\right). \tag{19}$$

Аналогично из (12) и (2b) получим

$$\bar{h}^{(2)}_{00}(m, r) = \frac{m^2G^2}{b^2}\left(\frac{15}{2} - 6\frac{r^2}{b^2} + \frac{3}{2}\frac{r^4}{b^4}\right). \tag{12a}$$

Заметим, что $h^{(2)}_{\alpha\beta}(m, r)$ отличается от гармонической $h^{(2)har}_{\alpha\beta}(m, r)$ или изотропной $h^{(2)iso}_{\alpha\beta}(m, r)$ только на калибровочные члены, см. подробнее в [1]. Уравнение (19) справедливо во всех этих системах.

Наружное решение. С помощью (5) из (10) найдём вклад в $\bar{h}^{(2)}_{\alpha\beta}(m', r)$ от $r' < b$

$$16\pi G \int\limits_{r'<b<r} \frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}(T^{(1)}_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}) = (mG)^2\left[-\frac{14}{3}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{rb} - \frac{4}{5\cdot 7}b\left(\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3}\right)\right]. \tag{20}$$

Здесь использованы ф. (A4), (A5) и (A16) в [1]. С помощью формулы (см., напр., уравнение (70) в [5])

$$16\pi G t_{\alpha\beta} = (mG)^2\left[\frac{14\delta_{\alpha\beta}}{r^4} - \frac{28 x_\alpha x_\beta}{r^6}\right] \tag{21}$$

найдём вклад в $\bar{h}^{(2)}_{\alpha\beta}(m', r)$ от области $b < r'$

$$16\pi G \int\limits_{b<r',r} \frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}t_{\alpha\beta}(x') = (mG)^2\left[\frac{14}{3}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{rb} - \frac{7x_\alpha x_\beta}{r^4} + \frac{28}{5}b\left(\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3}\right)\right]. \tag{22}$$

Здесь использованы ф. (A18) и (A15) в [1]. Сумма двух вкладов (20) и (22) даёт

$$\bar{h}^{(2)}_{\alpha\beta}(m',r) = (mG)^2\left[-7\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} + \frac{192}{35}b\left(\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3}\right)\right]. \tag{23}$$

Напомним, что $\bar{h}^{(2)}_{\alpha\beta}(m',r) = \bar{h}^{(2)}_{\alpha\beta}(m,r)$ поскольку $\bar{h}^{(1)}_{\alpha\beta}(m',r) = 0$, см. вторую формулу в (2). Полезно заметить, что в (23) область $b < r'$ даёт существенно больше, чем $r' < b$.

Из первого уравнения в (13) и соотношения

$$h^{(2)}(m',r) = (mG)^2\left(\frac{12}{rb} + \frac{10}{r^2}\right) = -\bar{h}(m',r) \tag{24}$$

найдём

$$h^{(2)}_{\alpha\beta}(m',r) = m^2G^2\left[\frac{6\delta_{\alpha\beta}}{rb} + \left(\frac{5\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - \frac{7x_\alpha x_\beta}{r^4}\right) + \frac{192b}{35}\left(\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3}\right)\right]. \tag{25}$$

Выражение для $h^{(2)}_{\alpha\beta}(m,r)$ получается отсюда опусканием члена $\frac{6\delta_{\alpha\beta}}{rb}$, потому что он взаимно уничтожается членом из $h^{(1)}_{\alpha\beta}(m',r)$:

$$h^{(1)}_{\alpha\beta}(m',r) = h^{(1)}_{\alpha\beta}(m,r) - m^2G^2\frac{6\delta_{\alpha\beta}}{rb}, \quad h^{(1)}_{\alpha\beta}(m,r) = \delta_{\alpha\beta}\frac{2mG}{r}. \tag{26}$$

Таким образом

$$h^{(2)}_{\alpha\beta}(m,r) = m^2G^2\left[\left(\frac{5\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - \frac{7x_\alpha x_\beta}{r^4}\right) + \frac{64b}{35}\left(3\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right)\right]. \tag{25a}$$

Легко проверить, что внутреннее решение (18) непрерывно сшивается с наружным (25a):

$$h^{(2)}_{\alpha\beta}(m,r)\Big|_{r\to b} = \left(\frac{mG}{b}\right)^2\left[\frac{111}{35}\delta_{\alpha\beta} - \frac{53}{35}\frac{x_\alpha x_\beta}{b^2}\right] = h^{(2)}_{\alpha\beta}(m,r)\Big|_{b\leftarrow r}. \tag{27}$$

Заметим, что линейное приближение (2) справедливо в гармонической, изотропной и рассматриваемой нами системах координат. Нашу систему, даваемую в G^2 приближении ф. (18) ($r < b$) и (25a) ($r > b$), будем называть предпочтительной, так как она не содержит вклада от калибровочных степеней свободы.

Установим теперь связь координатного радиуса жидкости a в стандартной системе с радиусом b в предпочтительной системе. Наблюдаемый (инвариантный) радиус жидкости даётся выражением

$$a_{obs} = a + \frac{mG}{3} + \frac{3}{10}\frac{m^2G^2}{a}, \tag{28}$$

см. ф. (2.16) в [4] в G^2 приближении. Найдём эту величину в предпочтительной системе. В силу сферической симметрии не имеет значения по какому направлению измерять радиус. Выберем ось 1 за это направление. Тогда

$$dl = \left[1 + h_{11}^{(1)} + h_{11}^{(2)}\right]^{1/2} dr = \left[1 + \frac{1}{2}h_{11}^{(1)} + \frac{1}{2}h_{11}^{(2)} - \frac{1}{8}h_{11}^{(1)2}\right] dr. \tag{29}$$

Используя (2) и (18), найдём

$$b_{obs} \equiv a_{obs} = \int_0^b dl = b + \frac{4}{3}mG + \frac{97}{70}\frac{m^2G^2}{b}. \tag{29a}$$

Из (28) и (29a) имеем

$$a = b + mG + \frac{38}{35}\frac{m^2G^2}{b}. \tag{30}$$

Интересно установить вне материи связь радиуса r^{st} в стандартной системе с радиусом r в предпочтительной системе. Для этого найдём сначала выражение для измеримого радиуса r_{obs} в стандартной системе

$$r_{obs} = a_{obs} + \int_a^r dl = a_{obs} + \int_a^r dr(g_{rr}^{st})^{1/2} = a_{obs} + r - a + mG\ln\frac{r}{a} + m^2G^2\left(\frac{3}{2a} - \frac{3}{2r}\right). \tag{31}$$

Здесь везде $r = r^{st}$, $g_{rr}^{st} = (1+2\phi)^{-1} = 1 - 2\phi + (2\phi)^2$, $\phi = -mG/r$. В предпочтительной системе получим для этой величины

$$r_{obs} = r + mG\left(\frac{4}{3} + \ln\frac{r}{b}\right) + m^2G^2\left(\frac{4}{5b} + \frac{3}{2r} - \frac{32}{35}\frac{b}{r^2}\right). \tag{32}$$

Приравнивая (31) и (32), получим связь r с r^{st}. Её можно упростить, заметив что с точностью до членов порядка mG имеем $a = b + mG$, см. (30). Тогда с этой же точностью $r^{st} = r + mG$. Поэтому

$$\ln\frac{r^{st}}{a} = \ln\frac{r}{b} + mG\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right). \tag{33}$$

Таким образом получим

$$r^{st} = r + mG + m^2G^2\left(\frac{2}{r} - \frac{32}{35}\frac{b}{r^2}\right). \tag{34}$$

Используя эту связь, я не смог получить предпочтительную систему из стандартной.

Если наружное решение $h_{\alpha\beta}^{(1)}(m,r)$ удовлетворяет условию Гильберта, тогда для движения нерелятивистской частицы важно только то, что $h_{00}^{(2)}(m,r) = -2m^2G^2/r^2$. Другими словами, члены $h_{\alpha\beta}^{(2)}(m,r)$ $(\alpha,\beta = 1,2,3)$ существенны только при движении релятивистской частицы, когда v/c порядка единицы.

Заметим, что по римановой геометрии измеримая длина окружности радиуса r даётся выражением

$$L_{obs}(r) = 2\pi \left[r + mG + m^2G^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{32}{35}\frac{b}{r^2} \right) \right]. \tag{35}$$

Из этого соотношения в принципе можно определить радиус шара материи b. Функция $L_{obs}(r)$ определяется из измерений. В общей теории относительности по измерениям вне материи нельзя определить этот радиус по теореме Биркгофа (Birkhoff), см. §32.2 в [5]. Наше рассмотрение показывает, что в G^2 приближении помимо решения Шварцшильда есть еще метрика предпочтительной системы, которая также удовлетворяет гравитационному уравнению.

Покажем как получается (35). Исходим из соотношения

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta = [\delta_{\alpha\beta} + h^{(1)}_{\alpha\beta} + h^{(2)}_{\alpha\beta} + \ldots]dx_\alpha dx_\beta. \tag{36}$$

На окружности

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = 0, \quad \delta_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta = (r\varphi)^2 \tag{37}$$

члены, пропорциональные $x_\alpha x_\beta$ в $g_{\alpha\beta}$, не дают вклада в dl. Тогда, см. (26) и (25a)

$$dl^2 = (rd\varphi)^2 \left[1 + \frac{2mG}{r} + m^2G^2 \left(\frac{5}{r^2} - \frac{64}{35}\frac{b}{r^3} \right) \right]. \tag{38}$$

Отсюда с рассматриваемой точностью имеем

$$dl = rd\varphi \left[1 + \frac{mG}{r} + m^2G^2 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{32}{35}\frac{b}{r^3} \right) \right]. \tag{39}$$

Интегрирование по φ даёт (35).

Другой в принципе возможный способ проверки теории состоит в том, чтобы из следующей итерации получить $h^{(3)}_{00}(m,r)$. В этом приближении источники уже будут зависеть от радиуса b. Теперь в соотношении $\sqrt{|g_{00}|} = \omega_0/\omega$ функция слева известна из теории, а справа – из измерений гравитационного сдвига частоты света.

Интересно отметить, что из дифференциального уравнения теории источников естественно получается решение (25a), в котором надо положить $b = 0$. Оно также формируется только источниками и, таким образом, удовлетворяет условию Гильберта. Оно получалось мною раньше, см. ф. (73) в [6] или ф. (28) в [7]. Чтобы такое решение было непрерывным с внутренним решением, в уравнении (18) надо сделать калибровочное преобразование. Тогда внутреннее решение уже не будет удовлетворять условию

Гильберта. На этом основании и у внешнего решения меньше шансов соответствовать действительности.

В заключение замечу, что качественная зависимость наружной метрики от радиуса шара b сохранится и в том случае, если трехгравитонную вершину общей относительности модифицировать в соответствии с требованием теоретико-полевого подхода [7].

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] A. I. Nikishov, arXiv: 1605.06305 v.I [physics gen -ph] 16 May 2016.
[2] J. Schwinger, *Particles, sources and fields* (Addison-Wesley, 1970).
[3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley, New York, 1972).
[4] M. J. Duff, Phys. Rev. D **7**, 2317 (1973).
[5] C. W. Misner, K. S. Thorn, J. A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, 1973).
[6] A. I. Nikishov, ЭЧАЯ **32**(1), 5 (2001).
[7] А. И. Никишов, ЭЧАЯ **37**(5), 1466 (2006).

Поступила в редакцию 6 декабря 2016 г.