

УДК 621.384.64

## О СОГЛАСОВАНИИ СГУСТКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ОКНОМ ВЫВОДА ПУЧКА ИЗ УСКОРИТЕЛЯ

В. Г. Куракин, П. В. Куракин

*Для получения критерия согласования сгустка заряженных частиц с окном вывода пучка из ускорителя, заключающегося в минимизации эмиттанса выведенного через металлическую фольгу ускоренного пучка, используется функция распределения для рассеиваемой на ядрах фольги движущейся частицы. Приводятся методика построения фазового портрета рассеянного сгустка и критерия минимума его площади (эмиттанса). Выводится формула, связывающая эмиттансы падающего и рассеянного сгустков, а также уравнение эллипса, описывающего фазовый портрет согласованного сгустка.*

**Ключевые слова:** эмиттанс, фазовый портрет, кулоновское рассеяние, функция распределения, огибающая.

Выводные окна в виде металлических фольг, разделяющих вакуумные объемы ускорителя и тракта транспортировки, обеспечивая достаточную прозрачность для пучка заряженных частиц, тем не менее ухудшают его характеристики. Основным механизмом деградации пучка – многократное кулоновское рассеяние в материале фольги, которое приводит к увеличению поперечного фазового объема выводимого пучка. Увеличение поперечного эмиттанса пучка существенно зависит от параметров падающего на фольгу пучка, конкретнее, от размеров и ориентации его фазового эллипса. Минимальное увеличение эмиттанса пучка имеет место при определённых отношении осей и ориентации фазового эллипса, что мы и покажем в настоящей работе.

Для заряда, движущегося с постоянной энергией в направлении оси  $x$  в однородной изотропной среде и испытывающего многократное кулоновское рассеяние на ядрах среды, имеет место следующее распределение вероятностей нахождения частиц для

каждой из взаимно-перпендикулярных плоскостей, пересекающихся по оси  $x$  [1, 2]:

$$P(x, y, \theta) dy d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x^2} \exp \left[ -\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left( \theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] dy d\theta. \quad (1)$$

Здесь  $P(x, y, \theta) dy d\theta$  – вероятность обнаружить заряд на глубине  $x$  в интервалах  $(y, y + dy)$ ,  $(\theta, \theta + d\theta)$  поперечных смещений и углов, составляемых скоростью заряда с осью  $x$  в каждой из указанных плоскостей, а

$$\Theta_s^2 = \left( \frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left( \frac{4\pi}{\alpha} \right)^{1/2} m_e c^2 = 21 \text{ МэВ}, \quad (2)$$

где  $\beta$ ,  $p$ ,  $c$  – соответственно приведённая скорость заряда, его импульс и скорость света,  $X_0$  – радиационная длина,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  – постоянная тонкой структуры,  $e$ ,  $m_e$  – заряд электрона и его масса,  $\hbar$  – постоянная Планка.

Согласно (1) события  $(y, \theta)$  равной вероятности на глубине  $x$  расположены на эллипсах, описываемых в системе координат  $\eta = y/x, \theta$  уравнением

$$3\eta^2 - 3\eta\theta + \theta^2 = f = \text{const}, \quad (3)$$

где значение константы определяет относительное количество рассеиваемых частиц, охватываемых эллипсом. Среднее значение этой величины

$$\langle f \rangle = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x} \int (3\eta^2 - 3\eta\theta + \theta^2) \exp \left[ -\frac{4}{\Theta_s^2 x} (3\eta^2 - 3\eta\theta + \theta^2) \right] d\eta d\theta = \frac{1}{4} \Theta_s^2 x, \quad (4)$$

определяет эллипс, который естественно принять за фазовый портрет пучка, имеющего нитеобразную форму на входе в рассеивающую среду (поперечное распределение в виде  $\delta$ -функции), а площадь эллипса рассматривать как эмиттанс, нормированный на толщину рассеивающей пластины

$$S = \frac{2\pi \langle f \rangle}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \Theta_s^2 x. \quad (5)$$

В более привычных в оптике пучков единицах измерения – радианы и миллиметры – площадь эллипса рассеяния равна

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \Theta_s^2 x^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{x^2}{X_0}. \quad (6)$$

Для заряда, падающего на мишень толщиной  $h$  в точке  $Y$  под углом  $\Theta \ll 1$ , имеет место следующее распределение вероятностей

$$P(Y, \Theta, y, \theta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 h^2} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{4}{\Theta_s^2} \left[ \frac{(\theta - \Theta)^2}{h} - \frac{3(y - Y - h\Theta)(\theta - \Theta)}{h^2} + \frac{3(y - Y - h\Theta)^2}{h^3} \right] \right\}. \quad (7)$$

Из последнего соотношения следует, что каждой точке  $Y, \Theta$  фазового портрета налетающего пучка соответствует элементарный эллипс рассеяния с центром в точке  $Y + h\Theta, \Theta$  фазовой плоскости  $(y, \theta)$ , а граница фазового портрета рассеянного пучка определяется огибающей к семейству эллипсов рассеяния с центрами, лежащими на эллипсе, описываемом уравнением

$$A_1(\eta - \theta)^2 + A_2(\eta - \theta)\theta + A_3\theta^2 = F. \quad (8)$$

Здесь коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, F$  описывают фазовый эллипс падающего на мишень пучка

$$A_1\eta^2 + A_2\eta\theta + A_3\theta^2 = F, \quad (9)$$

где  $\eta = y/h$ .

С учётом отмеченного обстоятельства фазовый портрет рассеянного пучка определяется огибающей к семейству элементарных эллипсов рассеяния, а конкретнее – к эллипсам рассеяния, расположенных на кривой (8). Уравнение данной огибающей определяется методами дифференциальных уравнений и в общем случае описывает кривую порядка более второго. Для решения конкретной поставленной задачи мы не будем использовать стандартный способ, а воспользуемся более элегантным методом. Подвергнем фазовую плоскость сжатию в направлении большей оси элементарного эллипса рассеяния с коэффициентом сжатия  $k = (4 + \sqrt{13})/\sqrt{3} \approx 4.4$ , равным отношению большой и малой полуосей отмеченного эллипса. В сжатой плоскости элементарный эллипс рассеяния представляет собой окружность, а огибающая представляет собой кривую, проведенную через концы перпендикуляров к трансформированному эллипсу (8). Приращение площади, занятой рассеянными частицами в сжатой плоскости, легко вычисляется:

$$\Delta S' = \pi b^2 + bL'. \quad (10)$$

Здесь  $b$  – малая полуось эллипса рассеяния, а  $L'$  – периметр эллипса (8) в преобразованной системе координат. Учитывая, что первый член в правой части данной формулы представляет собой элементарный эмиттанс рассеяния  $\varepsilon'$  в преобразованной системе, а минимальное значение периметра  $L'$  из множества эллипсов с заданной площадью имеет место, когда эллипс превращается в окружность, получим, что минимальное значение периметра

$$L'_{\min} = 2\pi R = 2\sqrt{\pi\varepsilon'_i}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon'_i$  – эмиттанс заряженного сгустка до рассеяния в преобразованной системе координат. Окончательно имеем следующую формулу для минимального эмиттанса рассеянного пучка на сжатой фазовой плоскости

$$\varepsilon'_s = \varepsilon' + 2\sqrt{\varepsilon'\varepsilon'_i} + \varepsilon'_i. \quad (12)$$

Учитывая, что при переходе к штрихованной системе координат площади уменьшаются в  $k$  раз, а в соотношение (12) входят только площади, аналогичное равенство имеет место на исходной фазовой плоскости. В общем случае, как это следует из приведенных рассуждений, соотношение, связывающее эмиттансы падающего и рассеянного сгустков, удобнее переписать в виде

$$\sqrt{\varepsilon_s} \geq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_i}. \quad (13)$$

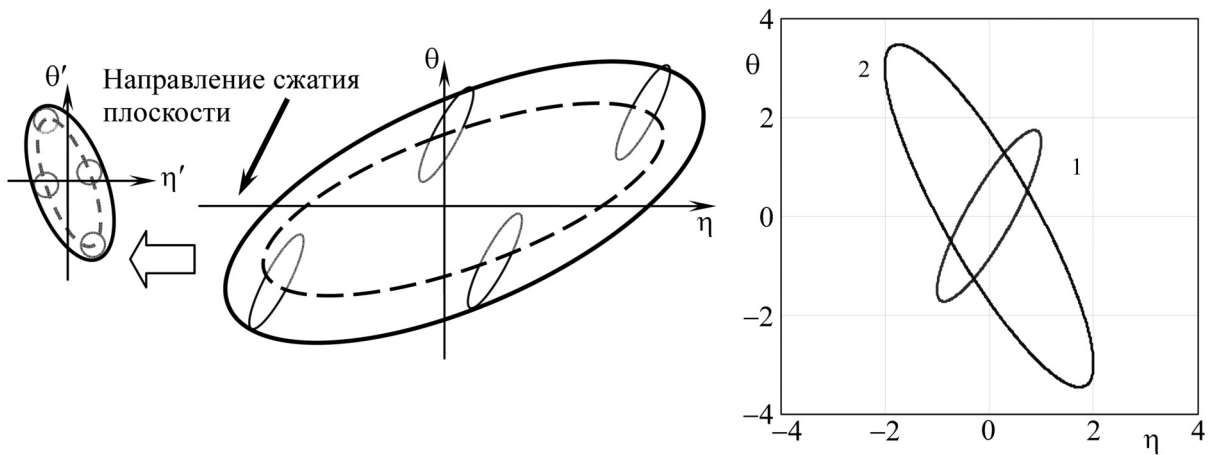


Рис. 1: Преобразование фазовой плоскости (сжатие) для вычисления эмиттанса рассеянного заряженного сгустка. Изображены справа: эллипс, описываемый уравнением (8) (штриховая линия), элементарные эллипсы рассеяния с центрами на эллипсе (8) и огибающая рассеянного пучка (сплошная линия). Слева та же картинка после сжатия фазовой плоскости.

Рис. 2: Положение на фазовой плоскости  $(\eta, \theta)$  элементарного эллипса рассеяния (1) и фазового портрета согласованного заряженного сгустка перед мишенью (2).

Процедура вычисления минимального эмиттанса рассеянного пучка демонстрируется рис. 1. Из предыдущих рассуждений следует, что для того, чтобы после прохождения

рассеивающей среды эмиттанс заряженного сгустка имел минимально возможное значение, необходимо, чтобы эллипс, служащий каркасом для элементарных эллипсов рассеяния и описываемый уравнением (8), был подобен элементарному эллипсу рассеяния. Простые вычисления дают, что это имеет место, если падающий пучок описывается в фазовом пространстве эллипсом

$$3\eta^2 + 3\eta\theta + \theta^2 = F. \quad (14)$$

Назовём такой пучок согласованным. На рис. 2 в качестве примера приведены фазовый портрет падающего пучка и элементарный эллипс рассеяния. Заметим, что в реальности выполнить условие согласования и тем самым максимально возможным образом уменьшить деградацию пучка заряженных частиц удаётся далеко не всегда. Это связано с тем, что технически сложно согласованным образом сфокусировать пучок на мишень при больших (десятки мрад и больше) углах рассеяния в материале мишени. В этом случае для достижения минимальной деградации пучка приходится решать задачу на нахождение условного экстремума.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Б. Росси, *Частицы больших энергий*. Перевод с английского (ГИТТЛ, Москва, 1955), 536 с.
- [2] С. З. Беленький, *Лавинные процессы в космических лучах* (ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1948), 244 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2017 г.