УДК 535.223.2

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВЫВОД ЗАКОНА СТЕФАНА–БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ЗАКОНА ПЛАНКА ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ

В. К. Битюков[1], Ю. И. Худак[1], Н. Г. Гусейн-заде[2,3]

Из закона Планка для спектрального потока излучения объекта аналитическим путём, математически строго, получен закон Стефана–Больцмана для интегрального потока излучения.

Ключевые слова: излучение, закон Планка, закон Стефана–Больцмана.

Повышение плотности монтажа радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) приводит к увеличению плотности тепловыделения в ней, а значит к необходимости диагностики теплового состояния РЭА на всех этапах ее жизненного цикла. Наиболее информативным параметром теплового состояния РЭА является температура T, измеряемая бесконтактным методом с использованием оптико-электронных (пирометрических или тепловизионных) систем (ОЭС) [1, 2]. Принцип действия ОЭС базируется на законах излучения Планка (для монохроматического потока излучения) и Стефана–Больцмана (для интегрального потока излучения).

С хронологической точки зрения Й. Стефан впервые в 1879 г. при измерении теплоотдачи платиновой проволоки в зависимости от ее температуры эмпирически установил пропорциональность плотности интегрального потока излучаемой ею энергии четвертой степени абсолютной температуры для испускательной способности любого тела. Однако последующие измерения показали его справедливость только для испускательной способности абсолютно чёрного тела.

В 1884 г. ученик Й. Стефана Л. Больцман из термодинамических соображений теоретически получил закон о пропорциональности плотности интегрального потока излучения E_t^0 абсолютно чёрного тела (АЧТ) четвёртой степени его температуры, измеренной

[1] Московский технологический университет (МИРЭА), 119454 Россия, Москва, проспект Вернадского, д. 78; e-mail: bitukov@mirea.ru.

[2] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38.

[3] РНИМУ им. Н. И. Пирогова, 117997 Россия, Москва, ул. Островитянова, д. 1.

в кельвинах. Выражение для плотности интегрального потока излучения E_t^0 АЧТ, излучающего в полусферу среды с показателем преломления $n = 1$, может быть записано в виде

$$E_t^0 = \sigma T^4, \tag{1}$$

где $\sigma = (5.6687 \pm 0.0010) \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) – постоянная Стефана–Больцмана. Выражение (1) получило название закона Стефана–Больцмана.

В 1900 г. М. Планк на базе квантовой теории электромагнитного излучения показал, что плотность потока спектрального (монохроматического) излучения $E_\nu^0(T)$ АЧТ в полусферу среды с показателем преломления $n = 1$ (напр., вакуум или воздух) определяется формулой

$$E_\nu^0(T) = \frac{2h\nu^3}{c_0^2[\exp[h\nu/(kT)] - 1]}, \tag{2}$$

где ν – частота; h – постоянная Планка; k – постоянная Больцмана; c_0 – скорость света в вакууме.

Выражение (2) для определения плотности потока спектрального излучения с использованием вместо частоты ν длины волны λ может быть записано в виде

$$E_\lambda^0(T) = \frac{c_1}{\lambda^5[\exp[c_2/(\lambda T)] - 1]}, \tag{3}$$

где $c_1 = 3.7413 \cdot 10^{-16}$ Вт·м^2, $c_2 = 1.4380 \cdot 10^{-2}$ м·К – первая и вторая постоянные Планка, соответственно.

Если излучение происходит не в вакуум, а в среду, имеющую показатель преломления n, то в формуле (2) следует заменить скорость света в вакууме c_0 на c_0/n, а в формуле (3) – длину волны λ на λ/n.

В литературе достаточно часто рассматривается связь закона Планка для спектрального потока излучения объекта и закона Стефана–Больцмана для интегрального потока излучения объекта. Традиционно отмечается, что выражение (1) представляет собой интеграл от плотности потока спектрального излучения $E_\lambda^0(T)$ АЧТ по всем длинам волн λ (для формулы (3)) электромагнитного излучения, например [3], то есть λ изменяется от 0 до ∞

$$E_t^0 = \int_0^\infty E_\lambda^0(T) d\lambda = \sigma T^4. \tag{4}$$

К сожалению, несмотря на широкое использование ОЭС для бесконтактного контроля температуры поверхности объектов, до настоящего времени отсутствует строгий аналитический вывод формулы (4) из выражения (3). Вместо вывода имеются, как правило, лишь фрагментарные указания по данному вопросу.

По этой причине имеет смысл представить строгий аналитический вывод закона Стефана–Больцмана из закона Планка, один из вариантов которого представлен в [4]. Это будет служить подтверждением достоверности результатов, для получения которых использованы законы Стефана–Больцмана и Планка.

Аналитический вывод закона Стефана–Больцмана для интегрального потока излучения из закона Планка для спектрального потока излучения состоит, по существу, в вычислении интеграла в правой части выражения (3) [3, 4–11], то есть

$$E_t^0(T) = \int\limits_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5(\exp(c_2/(\lambda T)) - 1)} d\lambda. \tag{5}$$

Приступая к исследованию записанного выражения, прежде всего необходимо отметить, что интеграл в (5) является несобственным как при $\lambda = 0$, так и при $\lambda \to +\infty$.

Таким образом, необходимо убедиться, что интеграл в (5) сходится как при $\lambda = 0$, так и при $\lambda \to +\infty$ и, именно по этой причине, имеет вполне ясный физический смысл.

Для удобства рассуждений и последующего вычисления интеграла в выражении (5) целесообразно в интеграле сделать замену переменной, приняв $x = c_2/(\lambda T)$.

Тогда $\lambda = c_2/(xT)$ и $d\lambda = -c_2/(Tx^2)dx$, а пределы интегрирования $\lambda = 0$ и $\lambda \to +\infty$ превращаются в пределы интегрирования $x = +\infty$ и $x = 0$, соответственно.

После указанной замены переменной интеграл (5) примет вид

$$E_t^0(T) = c_1 \int\limits_{+\infty}^0 \frac{[(T/c_2)^5 x^5 (c_2/T)(-x^{-2})]dx}{(\exp x - 1)} = c_1 (T/c_2)^4 \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{(\exp x - 1)}. \tag{6}$$

Для сходимости интеграла в формуле (6) при $x \to +\infty$ достаточно, чтобы подынтегральная функция $x^3/(\exp x - 1)$ в этом интеграле имела при $x \to +\infty$ порядок убывания более высокий, чем $1/x^\alpha$, причем $\alpha > 1$.

Поэтому, сходимость интеграла при $x \to +\infty$ действительно имеет место, так как величина $x^3 e^{-x}$, определяющая убывание рассматриваемой подынтегральной функции, стремится при $x \to +\infty$ к нулю быстрее любой степени $1/x$ (в знаменателе $x^3/(\exp x - 1)$ выполнено пренебрежение единицей по сравнению с e^x).

Для обоснования сходимости несобственного интеграла в (6) при $x = 0$ и его последующего вычисления целесообразно воспользоваться стандартным определением несобственного интеграла при $x \to 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx \right] = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^3 \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx \right], \tag{7}$$

где последнее выражение получено умножением числителя и знаменателя подынтегральной функции в предпоследнем выражении на e^{-x}.

Часть $\exp(-x)/[1 - \exp(-x)]$ подынтегральной функции в последнем из интегралов в (7), после замены $\exp(-x) = z$, можно разложить по формуле геометрической прогрессии $\dfrac{z}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}$ в степенной ряд, который равномерно по z сходится на любом отрезке $[0, q]$ изменения переменной z.

Возвращаясь в приведённом выше степенном ряде в виде геометрической прогрессии к переменной x по формуле $z = \exp(-x)$, а затем, умножив каждый член получившегося ряда на x^3, можно получить для подынтегральной функции в последней части выражения (7) равномерно по x на интервале $[\varepsilon, +\infty)$ сходящийся ряд (на основании признака Вейерштрасса [12])

$$\frac{\exp(-x)x^3}{1 - \exp(-x)} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-[n+1]x).$$

Это верно потому, что при условии $0 < \varepsilon \leq x$ в силу неравенства $z = \exp(-x) \leq \exp(-\varepsilon) = q < 1$ условия признака Вейерштрасса будут выполняться для нового ряда, а отрезок $[0, q]$ взаимно-однозначно соответствует интервалу $[\varepsilon, +\infty)$ при экспоненциальной замене $z = \exp(-x)$ и $q = \exp(-\varepsilon)$.

Представленные рассуждения обосновывают приведение выражения $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \dfrac{x^3 \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx \right]$ в (7) к эквивалентному виду

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-[n+1]x) dx \right]. \tag{8}$$

Ряд под интегралом в выражении (8) равномерно по x сходится при всех x из интервала $\varepsilon \leq x < +\infty$. Поэтому этот ряд можно проинтегрировать почленно, что позволяет преобразовать выражение (8) к эквивалентному виду

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x^3 \exp(-(n+1)x) dx \right) \right). \tag{9}$$

В каждом из интегралов под знаком суммы целесообразно сделать замену переменной по формуле $(n+1)x = t$. При этом нижний предел $x = \varepsilon$ каждого исходного интеграла превращается в новый нижний предел $t = (n+1)\varepsilon$, а верхний предел каждого исходного интеграла $x = +\infty$ превращается в новый верхний предел $t = +\infty$. Очевидно также, что $dx = 1/(n+1)dt$.

С использованием новой переменной t выражение (9) примет вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3}t^3\frac{1}{n+1}\exp(-t)dt\right)\right). \tag{10}$$

Выражение (10), после вынесения постоянных $(n+1)^{-4}$ из-под знаков интегралов в каждом из членов ряда, можно записать в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^4}\int\limits_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty}t^3\exp(-t)dt\right)\right). \tag{11}$$

В (11) ряд под знаком предела равномерно по параметру ε (на интервале изменения ε [0, 1]) сходится по признаку Вейерштрасса [12], так как числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^4} \tag{12}$$

сходится, а численное значение каждого из интегралов

$$f_n(\varepsilon) = \int\limits_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty}t^3\exp(-t)dt \tag{13}$$

равномерно ограничено сверху общим для них значением пределов при $\varepsilon\to 0+$ значением гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty}t^{s-1}\exp(-t)dt$$

при $s = 4$

$$\Gamma(4) = \int\limits_0^{+\infty}t^3\exp(-t)dt = 3! \tag{14}$$

Ввиду отмеченной выше равномерной сходимости ряда под знаком предела в выражении (11) по параметру ε при $0 \le \varepsilon \le 1$, можно перейти к пределу в (11) под знаком суммы ряда.

Тогда выражение (11) с учётом того, что после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0+$ все величины интегралов принимают одно и то же значение (14), трансформируется в соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \left(\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty} t^3 \exp(-t) dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \cdot 3! \qquad (15)$$

Учитывая известное выражение для суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

(см., напр., [12]), выражение (6) можно привести к виду

$$E_t^0(T) = c_1 (T/c_2)^4 (\pi^4/15) = c_1 \pi^4 T^4/(15 c_2^4) = \sigma T^4, \qquad (16)$$

где $\sigma = c_1 \pi^4 T^4/(15 c_2^4)$.

Таким образом, на основании закона Планка для спектрального потока излучения строгим аналитическим путём и с полным математическим обоснованием получен закон Стефана–Больцмана для интегрального потока излучения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Битюков, Известия Российской академии наук. Теория и системы управления, № 2, 227 (1991).

[2] В. К. Битюков, А. Н. Жуков, Д. С. Симачков, Российский технологический журнал **4**(4(13)), 21 (2016).

[3] Ф. Крейт, У. Блек, *Основы теплопередачи.* Пер. с англ. (М., Мир, 1983).

[4] В. К. Битюков, Ю. И. Худак, Аналитический вывод закона Стефана–Больцмана из закона Планка // Теплофизика в энергосбережении и управлении качеством: материалы Шестой международной теплофизической школы: в 2-х ч. Тамбов, 1-6 октября 2007 г. (ТГТУ, Тамбов, 2007), ч. I, с. 28.

[5] Х.-Г. Шёпф, *От Кирхгофа до Планка.* Перевод с немецкого. Под редакцией Д. Н. Зубарева (М., Мир, 1981).

[6] Э. М. Спэрроу, Р. Д. Сесс, *Теплообмен излучением.* Пер. с англ. Под редакцией А. Г. Блоха (Л., Энергия, 1971).

[7] Р. Зигель, Дж. Хауэлл, *Теплообмен излучением.* Пер. с англ. (М., Мир, 1975), 934 с.

[8] М. Н. Оцисик, *Сложный теплообмен.* Пер. с англ. Под редакцией Н. А. Анфимова (М., Мир, 1976), 616 с.

[9] А. Г. Блох, Ю. А. Журавлев, Л. Н. Рыжков, *Теплообмен излучением* (М., Энергоатомиздат, 1991), 432 с.

[10] М. М. Мирошников, *Теоретические основы оптико-электронных приборов.* Учебное пособие. (Л., Машиностроение, 1983), 696 с.

[11] В. К. Битюков, В. А. Петров, *Методы и средства бесконтактного контроля теплового состояния изделий.* Учебное пособие (М., МИРЭА, 1999), 96 с.

[12] И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов* (М., Наука, 1986), 544 с.

Поступила в редакцию 8 июня 2017 г.