УДК 537.591.15

ДЛИННОВОЛНОВОЕ КОГЕРЕНТНОЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ КАСКАДОВ. II. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. А. Царев, В. А. Чечин

В рамках каскадной теории проведены вычисления длинноволнового предела для радиоизлучения от широких атмосферных ливней (ШАЛ) с учетом влияния геомагнитного поля. Полученные результаты сравниваются с результатами численных расчетов, выполненных методом Монте-Карло.

1. Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой, в рамках каскадной теории (КТ) [2, 3], проведено вычисление длинноволнового предела для поля радиоизлучения каскадов с учетом реакций, приводящих к появлению электроотрицательного избытка (ОИ): комптон-эффекта, аннигиляции позитронов, мёллеровского рассеяния и Баба-рассеяния. При этом в [1] не учитывалось влияние магнитного поля Земли, что является вполне оправданным для каскадов, развивающихся в плотных средах. Для радиоизлучения ливней в атмосфере (ШАЛ) роль магнитного поля оказывается весьма существенной (см., например, [4]). При наличии магнитного поля, перпендикулярного к оси ливня (Z-ось), каскадные электроны и позитроны смещаются в XZ-плоскости в противоположные стороны. В результате, у вектора пробега ОИ

$$\mathbf{L}_{\rm ex} = \int\!\!\int\!\!\int d\mathbf{r} \int dt \mathbf{j}(t,\mathbf{r}) = \int\!\!\int\!\!\int d\mathbf{r} \int dt \int\!\!\int\!\!\int \mathbf{v} d\mathbf{v} f_{\rm ex}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = L_{\rm tot}\{\delta\vec{\theta}(H), \eta\} \qquad (1)$$

(см. (3) в [1]) появляется поперечная компонента $\mathbf{L}_{\rm ex\perp} = L_{\rm tot}\delta\vec{\theta}(H)$, зависящая от напряженности магнитного поля. Здесь $L_{\rm tot}$ – полный пробег заряженных частиц каскада, η – относительный пробег ОИ, вычисленный в [1]. Средний угол отклонения $\delta\theta$ каскадных электронов в геомагнитном поле вычисляется ниже в п. 2. В п. 3 длинноволновое приближение для поля излучения каскадов в плотных средах и в атмосфере сравнивается с результатами расчетов, выполненных методом Монте-Карло. Одна из существенных поправок к длинноволновому приближению, обязанная поперечному дипольному моменту ШАЛ в геомагнитном поле, вычислена в п. 4. Ниже везде мы используем те же обозначения, что и в работе [1].

2. Оценка поперечного тока каскада в геомагнитном поле. При наличии магнитного поля H вдоль Y-оси в правую часть кинетических уравнений (5) в [1] нужно добавить $\mu \frac{E_H}{E} \frac{\partial f_{e,p}}{\partial \theta_x}$, где $E_H = eHL_{\text{rad}}$. Тогда

$$\left(\frac{d}{dt} + \mathbf{D}\right) f_{\text{ex}} = s_{\text{ex}} + s_H, \; s_H = -\frac{E_H}{E} \frac{\partial (f_e + f_p)}{\partial \theta_x} = -\frac{2E_H}{E} \frac{\partial f_e}{\partial \theta_x}, \tag{2}$$

а уравнение (14) в [1] принимает вид:

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{k}) = \mathbf{L}_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}_0) + \int\int\int \mathbf{L}_1(\mathbf{k}, \mathbf{v})[S_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) + S_H(\mathbf{k}, \mathbf{v})]d\mathbf{v}, \; S_H = -\frac{2E_H}{E} \frac{\partial F_e}{\partial \theta_x}. \tag{3}$$

Отсюда, следуя логике статьи [1], получим первую по магнитному полю поправку к вектору $\mathbf{L}_{\text{ex}}$:

$$\delta \mathbf{L}_{\text{ex}} = -\int_0^{E_0} R(E) \frac{E_H}{E} dE \int\int \{\theta_x, \theta_y, 1\} \frac{2\partial F_e(\vec{\theta}, E)}{\partial \theta_x} d\theta_x d\theta_y.$$

Проинтегрировав по углам, получим $\delta \mathbf{L}_{\text{ex}} = \{\delta L_H, 0, 0\}$, где

$$\delta L_H = \int_0^{E_0} R(E) \frac{E_H}{E} 2F_e(E) dE = L_{\text{tot}} \delta \theta_x. \tag{4}$$

Если положить $R(E) \approx E/\beta$ и учесть, что $2\int_0^{\infty} F_e(E)dE = L_{\text{tot}}$, то $\delta\theta_x \approx E_H/\beta \approx \omega_H(\beta) L_{\text{rad}}/c$. Вычисление интеграла (4) с реальным пробегом $R(E)$ (см. [1]) даёт $\delta\theta_x \approx 0.7 E_H/\beta$. Эффект геомагнитного поля заметен только для каскадов в атмосфере, поскольку относительный пробег ОИ η почти не зависит от плотности среды, а $\delta\theta_x \propto L_{\text{rad}} \propto 1/\rho$.

3. Условия применимости длинноволнового приближения: сравнение с МК расчетами. Линейная зависимость поля $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ от частоты в длинноволновой области справедлива при $f << \min(f_t, f_z, f_\rho)$, где f_t, f_z, f_ρ – частоты, зависящие от угла излучения θ_k

и связанные с временной и пространственной зависимостью тока $\mathbf{j}(t,\mathbf{r})$ в каскаде. При $f \geq f_t, f_z, f_\rho$ линейный рост поля сменяется падением, характер которого определяется t- и $\mathbf{r}$-зависимостями в токе $\mathbf{j}(t,\mathbf{r})$. Оценим эти частоты.

Частицы каскада сосредоточены в некотором "диске", который движется как целое со скоростью $v_0 \approx c$; поэтому $\mathbf{j}(t,\mathbf{r}) \approx \mathbf{j}(t, z' = z - v_0 t, \vec{\rho})$. Для каскада в среде с показателем преломления $n \neq 1$,

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{k}) \approx \int dt \exp[i\omega t(1 - n\cos\theta_k v_0/c)] \int\int\int \mathbf{j}(t, z', \vec{\rho}) \exp(-ik_z z' - i\mathbf{k}_\rho \vec{\rho}) dz' d\vec{\rho},$$

где $k_z = \cos\theta_k \omega/c$, $k_\rho = \sin\theta_k \omega/c$. Следовательно,

$$f_t \approx \frac{1}{\pi(1 - n\cos\theta_k v_0/c)\langle\delta t\rangle}, \; f_z \approx \frac{c}{\pi\cos\theta_k\langle\delta z'\rangle}, \; f_\rho \approx \frac{c}{\pi\sin\theta_k\langle\delta\rho\rangle}, \tag{5}$$

где $\langle\delta t\rangle$, $\langle\delta z'\rangle$, $\langle\delta\rho\rangle$ – характерные временные и координатные размеры каскада.

Основная часть радиоизлучения каскадов в плотной среде $(n - 1 \approx O(1))$ сосредоточена вблизи черенковского угла $\cos\theta_k \approx \cos\theta_C = 1/n$, т.е. при $1 - n\cos\theta_k$ отношение $v_0/c \approx 0$; в этом случае поле радиоизлучения пропорционально частоте при $f << f_\rho \leq (f_z, f_t)$. Поскольку $\langle\delta\rho\rangle \approx L_{\mathrm{rad}} E_s/E_c$, $(E_s \approx 21$ МэВ), то $f_\rho \approx 1.1$ ГГц для льда ($n = 1.8$, $L_{\mathrm{rad}} = 0.4$ м, $E_c = 73$ МэВ) и $f_\rho \approx 3.3$ ГГц для лунного грунта ($n = 1.8$, $L_{\mathrm{rad}} = 0.075$ м, $E_c = 40$ МэВ). Частота f_ρ фактически совпадает с частотой f_0, которая используется при параметризации поля радиоизлучения каскадов в плотных средах [5–7].

Согласно [1], длинноволновая часть радиоизлучения каскадов в плотных средах описывается формулой

$$R|\mathbf{E}(f << f_0, \cos\theta_k \approx 1/n)| \approx (2\pi e f/c^2)(\eta L_{\mathrm{rad}} E_0/\beta)\sin\theta_C = C f E_0, \; \mu\text{В/МГц}, \tag{6}$$

где

$$C = (2\pi e/c^2)(\eta L_{\mathrm{rad}}/\beta)\sin\theta_C \approx 10^{-7}\sin\theta_C \eta L_{\mathrm{rad}}(\text{м})/\beta(\text{ТэВ}), \; \mu\text{В/МГц}^2/\text{ТэВ}. \tag{7}$$

Сравним (7) с МК расчетами [5] для льда. При $\eta = 0.25$ и $\sin\theta_C = 0.83$ из (7) получим $C \approx 10^{-4}\mu$В/МГц^2/ТэВ. Это значение соответствует оценке $C_{\text{МК}} \approx 2.0 \cdot 10^{-4}\mu$В/МГц^2/ТэВ, так как определенное в [5] фурье-преобразование по времени содержит дополнительный множитель 2 по сравнению с (6). Для лунного грунта формула (7) даёт $C \approx 5.1 \cdot 10^{-5}\mu$В/МГц^2/ТэВ; это значение использовалось в расчетах [6].

Для каскадов в атмосфере ситуация несколько усложняется. В этом случае когерентное излучение сосредоточено под очень малыми углами к оси ШАЛ и условие волновой зоны может не выполняться на земной поверхности для излучения высокоэнергичных ШАЛ, так как значительная часть частиц ШАЛ падает на сами радиоантенны. По этой причине в МК расчетах радиоизлучения ШАЛ обычно суммируются поля Лиенара–Вихерта всех заряженных частиц ливня. При этом вместо биполярного импульса $|\mathbf{E}(\mathbf{k})| \propto f$, $f \leq \min(f_t, f_z, f_\rho)$, может получиться однополярный импульс с падающим спектром в области $10 \leq f \leq 1000$ МГц [7, 8]. Для наклонных ШАЛ условие волновой зоны для радиоизлучения почти вперед может выполняться, если до точки наблюдения доходит лишь малая часть частиц. Имея в виду эти оговорки, оценим f_t, f_z, f_ρ для радиоизлучения ШАЛ в волновой зоне.

В области $\theta_k \approx 0.1$, $f_t \approx \dfrac{2c}{\pi[\theta_k^2 + \gamma_0^{-2} + 2(1-n)]\langle\delta l\rangle} \approx \dfrac{2c}{\pi 0.01\langle\delta l\rangle}$, где $\delta l \approx 1.3 L_{\text{rad}}\sqrt{\ln(E_0/E_c)}$. При $E_0 = 10^{17}$ эВ, $E_c \approx 72$ МэВ, $L_{\text{rad}} \approx 350$ м получим $f_t \approx 10$ МГц. Эту частоту следует сопоставить с $f_\rho \approx \dfrac{c}{\pi\theta_k\langle\delta\rho\rangle} \approx \dfrac{cE_c}{\pi\theta_k L_{\text{rad}}E_s} \approx 10$ МГц и $f_z \approx \dfrac{c}{\pi\langle\delta z\rangle} \approx \dfrac{1}{\pi\langle\delta\tau\rangle} \approx 30$ МГц. Продольный размер δz диска ШАЛ определяется разбросом времени прибытия частиц ШАЛ: $\langle\delta\tau\rangle \approx 10$ нсек [8]. При увеличении угла θ_k область длинноволнового приближения быстро сужается, так как $f_t \propto 1/\theta_k^2$, $f_\rho \propto 1/\theta_k$. Наоборот, при углах $\theta_k << 0.1$ длинноволновое приближение применимо для частот $f << f_z \approx 30$ МГц.

Следовательно, длинноволновое приближение можно использовать в области $\theta_k \leq 0.1$, $f \leq 10$ МГц для получения верхней оценки радиоизлучения ШАЛ, причем

$$\mathbf{L}_{\text{ex}} = L_{\text{tot}}\{\delta\theta_x, 0, \eta\} \approx (L_{\text{rad}}E_0/\beta)\{0.7E_H/\beta, 0, 0.2\}. \tag{8}$$

При $H \approx 0.3$ Гаусс, $E_H \approx 0.03(\text{МэВ})L_{\text{rad}}(\text{м})H(\text{Гаусс}) \approx 3.1$ МэВ и $\delta\theta_x = 0.7E_H/\beta \approx 0.03$.

В этой частотно-угловой области поле радиоизлучения ШАЛ можно записать в виде (6) с множителем

$$C(\theta, H) \approx 10^{-7}|[\mathbf{n}_k \times [\mathbf{n}_k \times \vec{\eta}(H)]]|L_{\text{rad}}(\text{м})/\beta(\text{ТэВ}),\ \mu\text{В/МГц}^2/\text{ТэВ},$$

где $\vec{\eta}(\theta, H) = \{\delta\theta_x, 0, \eta\}$. В этом случае влияние геомагнитного поля на радиоизлучение ШАЛ сводится к повороту диаграммы направленности излучения на малый угол $\delta\theta_x/\eta \approx 0.15$ относительно оси ШАЛ, причем на самой оси

$$C(\theta_k = 0, H) \approx 10^{-7}\delta\theta_x L_{\text{rad}}(\text{м})/\beta(\text{ТэВ}) \approx 0.015,\ \mu\text{В/МГц}^2/\text{ТэВ}. \tag{9}$$

При $E_0 = 10^{17}$ эВ, $f = 10$ МГц и $R = 4$ км формулы (6) и (9) дают $|\mathbf{E}| \approx 4\mu$В/м/МГц. Интересно сравнить эту оценку с МК расчетами [8] для радиоизлучения вертикального

ШАЛ. Согласно [8], $|\mathbf{E}|_{\text{MC}} \approx 10\sqrt{2\pi} \approx 25\mu$В/м/МГц при тех же параметрах. Множитель $\sqrt{2\pi}$ возникает из-за различия в определении фурье-преобразований в [1] и [8]. Значительное расхождение этих оценок связано, в частности, с тем, что в [8] совершенно необоснованно используются формулы для синхротронного поля излучения при таких частотах, когда необходимо учитывать конечность пробега излучающих частиц (см. [9]).

4. Оценка индуцированного дипольного момента каскада в геомагнитном поле. Выше рассматривался нулевой член разложении экспоненты в интеграле (1) [1] по степеням ωt и $\mathbf{kr}$. Оценим теперь дополнительный эффект магнитного поля, который обычно интерпретируется как появление "индуцированного дипольного момента".

Найдем линейную по k_x поправку к продольной компоненте вектора $\mathbf{L}_{\text{ex}}$ в магнитном поле $\delta L_{\text{exZ}} = -iL_{\text{tot}}k_x\langle x\rangle$, где

$$\langle x\rangle = \frac{1}{L_{\text{tot}}}\int\limits_0^{E_0} M_x(E)dE;\; M_x(E) = \int\int d\theta\int dt\int\int\int x d\mathbf{r} f_{\text{ex}}(t,\mathbf{r},\vec{\theta},E).$$

Определим момент $M_\theta(E) = \int\int \theta_x d\vec{\theta}\int dt\int\int\int d\mathbf{r} f_{\text{ex}}(t,\mathbf{r},\vec{\theta},E)$. Моменты $M_{x,\theta}(E)$ находятся из уравнения (2) (при $s_{\text{ex}} = 0$) после умножения его на x или на θ_x и интегрирования по всем координатам, кроме энергии:

$$\left[\mathbf{W}_b + \beta\frac{\partial}{\partial E}\right] M_x(E) = -M_\theta(E),\; \left[\mathbf{W}_b + \beta\frac{\partial}{\partial E}\right] M_\theta(E) = -\frac{2E_H F_e(E)}{E}.$$

Отсюда, с учетом (17) из [1], $M_\theta(E) = 2E_H\int\limits_E^{E_0} F_e(E')F_1(E',E)dE'/E'$, $M_x(E) = \int\limits_E^{E_0} M_\theta(E')F_1(E',E)dE'$. Следовательно, $\langle x\rangle = \int\limits_0^\infty f(\epsilon')d\epsilon'\frac{E_H}{E'}\int\limits_0^{E'} F_1(E',E)R(E)dE$. Внутренний интеграл равен $R^2(E')/2$, поэтому (в обычных единицах, см. [1])

$$\langle x\rangle = \frac{L_{\text{rad}}}{2}\int\limits_0^\infty f(\epsilon)\frac{E_H}{E}\ln^2\left(1+\frac{E}{\beta}\right)d\epsilon = \frac{L_{\text{rad}}}{2}\frac{E_H}{\beta}C_d;$$

$$C_d = \int\limits_0^\infty f(\epsilon)\frac{2.29}{\epsilon}\ln^2\left(1+\frac{\epsilon}{2.29}\right)d\epsilon. \qquad (10)$$

Этот результат уточняет простую оценку $\langle x\rangle \approx \langle\omega_H(\beta)L^2_{\text{rad}}/2c\rangle \approx (L_{\text{rad}}/2)(E_H/\beta)$, в которой предполагается, что все частицы имеют энергию $E_c \approx \beta$. Вычисление интеграла (10) даёт $C_d \approx 0.25$.

В воздухе в геомагнитном поле $H \approx 0.3$ Гаусс из (10) получается оценка $d_x| = e\langle x\rangle \approx e1.8$ м. Столь малое значение индуцированного дипольного момента обусловлено предположением, что в каскаде рождаются только электрон-позитронные пары. Естественно, тормозное излучение отклоненных в противоположные стороны позитронов и электронов приведет к существенному расширению области образования пар в направлении X-оси. Однако этот эффект не даёт вклада в индуцированный дипольный момент, поскольку полный заряд каскада остается равным нулю.

5. Заключение. В [1] и данной работе вычислен вектор пробега отрицательного избытка $\mathbf{L}_{\text{ex}}$ электронно-фотонного каскада с учетом процессов, приводящих к электроотрицательному избытку, а также с учетом влияния геомагнитного поля. Z-проекция вектора $\mathbf{L}_{\text{ex}}$ пропорциональна относительному избытку η, а поперечная компонента – среднему углу отклонения $\delta\vec{\theta}(H)$ каскадных электронов в магнитном поле. В частности, для каскадов в воздухе

$$\mathbf{L}_{\text{ex}} = L_{\text{tot}}\{\delta\theta_x, 0, \eta\}, \ \delta\theta_x \approx 0.7E_H/\beta, \ \eta \approx 11.6(gmc^2/\beta)(0.64 + 0.09 + 0.34 - 0.07). \quad (11)$$

Четыре числа в (9) дают относительные вклады Комптон-эффекта, аннигиляции позитронов, Баба- и мёллеровского рассеяния (с учетом потерь энергии), соответственно.

Соотношение между эффектами отрицательного избытка и геомагнитного поля определяется числами $11.6gmc^2 \approx 15.2$ МэВ и $0.7^*E_H \approx 2.2$ МэВ (при $H \approx 0.3$ Гаусс). Влияние геомагнитного поля на длинноволновую часть радиоизлучения ШАЛ сводится к повороту вектора ПОИ $\mathbf{L}_{\text{ex}}$ и, следовательно, углового распределения излучения на угол 0.15 радиан.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-02-00515а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Царев, В. А. Чечин, Краткие сообщения по физике ФИАН, **36**(1), (2009).

[2] Б. Росси, К. Грейзен, *Взаимодействие космических лучей с веществом* (Москва, ГИТТЛ, 1948).

[3] С. З. Беленький, *Лавинные процессы в космических лучах* (Москва, ГИТТЛ, 1948).

[4] В. А. Царев, ЭЧАЯ **35**, 187 (2004).

[5] E. Zas, F. Halzen, and T. Stanev, Phys. Rev. **45**, 362 (1992); J. Alvarez-Muniz, E. Marques, R. A. Vazquez, and E. Zas, arXiv: astro-ph/0512337.

[6] Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, К. М. Пичхадзе и др., ДАН **406**, 327 (2006).
[7] D. A. Suprun, P. W. Gorham and J. L. Rosner, Astropart. Phys. **20**, 157 (2003).
[8] T. Huege and H. Falcke, Astron. & Astrophys. **412**, 19 (2003); T. Huege and H. Falcke, Astron. & Astrophys. **430**, 779 (2003); T. Huege and H. Falcke, Astropart. Phys. **24**, 116 (2005).
[9] Q. Luo, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **370**, 2071 (2006).

Поступила в редакцию 1 октября 2008 г.