

исследование от эллиптического до кругового Куперова, и, наконец, вклад Р. Донаджийского в нормализацию функции корреляции  $R_{ij}$ . В этом случае получается квазистационарная когомогенная статистическая модель (см. [1, 2]). УДК 524.8:52-54:533.7

## МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА ДЛЯ РАСЧЕТА КИНЕТИКИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ РЕКОМБИНАЦИИ ВОДОРОДА

М. С. Бургин

Вычисляется эффективный коэффициент рекомбинации на второй уровень, входящий в уравнения, описывающие кинетику рекомбинации в космологической зоне НП. Метод расчета основан на квазистационарном приближении и позволяет точно учесть каскадные переходы и вынужденные процессы без необходимости численно решать полную систему соответствующих кинетических уравнений.

За время, прошедшее после первых работ по кинетике космологической рекомбинации водорода [1, 2] были разработаны новые методы для вычисления зависимости степени ионизации и населеностей возбужденных состояний от времени. Методы эти отличаются друг от друга как лежащими в их основе модельными предположениями относительно физического состояния рекомбинирующей плазмы и протекающих в ней процессов, так и по трудоемкости вычислений, необходимых для решения уравнений, описывающих соответствующие модели.

Из реализованных к настоящему времени методов наиболее точное описание процессов, протекающих в зоне космологической рекомбинации, дает прямое численное решение СОДУ (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) для населенностей уровней многоуровневого модельного атома [3]. Однако для точного расчета кинетики рекомбинации и особенно при вычислении профилей рекомбинационных линий, возникающих при переходах между высоковозбужденными состояниями, необходимо учитывать большое число состояний. Высокий порядок получающейся при этом системы уравнений в сочетании с ее жесткостью, приводит к большим затратам вычислительных ресурсов

при получении численного решения и трудностям при контроле погрешности результата.

При обработке наблюдений анизотропии реликтового фона для расчета структуры рекомбинационной зоны широко используется программа RECFAST [4]. В основе алгоритма, реализованного в этой программе, лежит приближение эквивалентного двухуровневого атома с континуумом, в простейшем виде использованное еще в пионерских работах по кинетике космологической рекомбинации. Однако, в отличие от ранних работ, лежащая в основе программы RECFAST модель не предполагает, что возбужденные состояния находятся в равновесии с плазмой, а населенность уровня с главным квантовым числом  $n = 2$  является одним из неизвестных.

Скорость переходов из плазмы на возбужденный уровень модельного атома определяется эффективным коэффициентом рекомбинации  $\alpha_L^*$ . Здесь и далее нижний индекс  $L$  указывает, что рассматриваемая величина относится к  $L$ -оболочке, т.е. к уровню с главным квантовым числом  $n = 2$ . Коэффициент  $\alpha_L^*$  отличается от обычного коэффициента рекомбинации тем, что в нем учитываются не только прямые рекомбинации в состоянии с  $n = 2$ , но и каскадные переходы через промежуточные возбужденные состояния, а также тем, что учитываются не только спонтанные переходы, но и вынужденные переходы в поле теплового излучения. Если температурная зависимость  $\alpha_L^*$  известна, то получаемая СОДУ низкой размерности эффективно решается с помощью стандартных численных методов.

В [4] было принято, что  $\alpha_L^* = F\alpha_L$ , где  $\alpha_L$  – полученное в [5] приближение для полного (т.е. с учетом каскадных переходов) коэффициента рекомбинации с учетом только спонтанных процессов. Корректирующий множитель  $F$  (“fudge factor” по терминологии [4], введен для того, чтобы учесть ускорение рекомбинации за счет вынужденных переходов, и полагался постоянным. Было определено значение  $F$ , обеспечивающее наилучшее согласие между решением, получаемым в рамках модели двухуровневого атома, и приведенным в [3] решением полной СОДУ для многоуровневого атома в том диапазоне красных смещений, где ход рекомбинации может оказывать заметное влияние на пространственный спектр флуктуаций реликтового фона. Хорошее согласие между “двухуровневым” решением, не требующим большого объема вычислений, и решением полной системы и сделало возможным широкое использование кода RECFAST в программах расчета пространственного спектра флуктуаций.

Описанный выше подход оказался весьма эффективным в той области, для которой он разрабатывался, однако непосредственно использовать его для задач, требующих

расчетов в более широком диапазоне красных смещений или с существенно более высокой точностью результатов невозможно. Действительно, отношение  $\alpha_L^*/\alpha_L$  зависит, вообще говоря, от параметров плазмы и поля излучения, поэтому ошибка, вносимая предположением  $F = \text{const}$  растет при расширении диапазона параметров плазмы, для которых используется модель, а для фиксированного диапазона температур не может быть сделана сколь угодно малой. В работе [6] были проанализированы некоторые возможные обобщения алгоритма, использованного авторами RECAST. В частности, рассматривалась возможность отказа от предположения  $F = \text{const}$  при аппроксимации результатов полных многоуровневых расчетов с помощью двухуровневой модели, однако был сделан вывод о бесперспективности такого подхода.

В настоящей работе предлагается альтернативный метод расчета эффективного коэффициента рекомбинации, являющийся локальным по красному смещению  $z$ , т.е. позволяющий определить значение  $\alpha_L^*$  для заданного отдельно взятого значения температуры и, тем самым, не требующий интегрирования СОДУ кинетики рекомбинации. Метод основан на устанавливаемой ниже связи между общей многоуровневой моделью атома, рассматриваемой в квазистационарном приближении, и ее двухуровневым частным случаем.

**Основные предположения и исходные уравнения.** В основе рассмотрения лежит следующая физическая картина, стандартно используемая для описания структуры космологической зоны III. Водород рекомбинирует в поле чернотельного излучения с температурой, равной кинетической температуре плазмы. Скорость радиационных переходов между всеми состояниями (связанными и свободными), кроме основного, достаточно велика для того, чтобы время релаксации было мало по сравнению с характерным временем изменения параметров плазмы из-за космологического расширения. В силу этого, населенности состояний с  $n \geq 2$  можно определить из условия равенства скоростей процессов, населяющих и опустошающих эти состояния (квазистационарное приближение). Кроме того, предполагается, что выполняется предположение о  $l$ -равновесии, т.е. при фиксированном значении  $n$  населенности подуровней тонкой структуры пропорциональны их статистическим весам.

Переходы из плазмы и с возбужденных состояний с  $n > 2$  на основное состояние точно компенсируются обратными процессами. Таким образом, единственным каналом образования атомов в основном состоянии и единственной причиной того, что связанные возбужденные состояния не находятся в полном равновесии с плазмой, являются нескомпенсированные переходы  $n = 2 \Rightarrow n = 1$ .

Следуя [7] для вычисления населенностей возбужденных состояний в указанных предположениях, будем учитывать при численных расчетах состояния с  $n \leq M$  и введем  $K \times 1$  матрицы ( $K = M - 1$ )

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_K \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} N_1^{(0)} \\ \vdots \\ N_K^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(m)} = \begin{pmatrix} B_1^{(m)} \\ \vdots \\ B_K^{(m)} \end{pmatrix},$$

$K \times K$  матрицу

$$R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{K,1} & \cdots & R_{K,K} \end{pmatrix},$$

и диагональные  $K \times K$  матрицы

$$\mathbf{L}^{(m)} = \begin{pmatrix} L_1^{(m)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_K^{(m)} \end{pmatrix},$$

где  $m = 0, 1$ . Здесь  $N_i$  представляет собой населенность уровня с главным квантовым числом  $n = i + 1$ , а  $\mathbf{N}^{(0)}$  – значение  $\mathbf{N}$ , соответствующее равновесию возбужденных уровней с плазмой и легко вычисляемое по формуле Саха. Матрица  $R$  описывает переходы между возбужденными состояниями, элементы матриц  $\mathbf{B}^{(0)}$  и  $\mathbf{B}^{(1)}$  равны, соответственно, скоростям образования атомов в возбужденных состояниях в результате, соответственно, фоторекомбинации и переходов из основного состояния, а диагональные коэффициенты матриц  $L^{(0)}$  и  $L^{(1)}$  представляют собой коэффициенты скоростей переходов из возбужденных состояний в плазму и в основное состояние.

В этих обозначениях система уравнений стационарности для ансамбля состояний с  $2 \leq n \leq M$  может быть записана как

$$(Q - L^{(1)})\mathbf{N} + \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} = 0, \quad (1)$$

где  $Q = R - L^{(0)}$ . Выражения для элементов матриц  $\mathbf{N}^{(0)}$ ,  $R$ ,  $\mathbf{B}^{(m)}$  и  $\mathbf{L}^{(m)}$  приведены в [7] и цитированных там работах. Для дальнейших рассуждений точный вид этих выражений не имеет значения. Существенны лишь следующие их свойства: 1) элементы матриц  $R$ ,  $\mathbf{B}^{(m)}$  и  $\mathbf{L}^{(m)}$  не зависят от населенностей  $\mathbf{N}$ ; 2) из принципа детального равновесия следует равенство

$$L_i^{(0)}N_i^{(0)} = B_i^{(0)}, \quad (2)$$

так как предполагается, что переходы в излучении и в поглощении между основным состоянием и возбужденными состояниями с  $n > 2$  точно компенсируют друг друга, то при решении системы (1) можно исключить эти процессы из рассмотрения и положить

$$B_i^{(1)} = 0, L_i^{(1)} = 0 \quad \text{при } i > 1. \quad (3)$$

Кроме того, из определения  $\mathbf{N}^{(0)}$  следует равенство  $Q\mathbf{N}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)} = 0$ .

Обозначая  $\sigma = L_1^{(1)}$ ,  $\beta = B_1^{(1)}$  и применяя для решения (1) метод, использованный в [7], получаем

$$N_1 = \frac{N_1^{(0)} - \beta P_{11}}{1 - \sigma P_{11}}, \quad (4)$$

где  $P_{11}$  – элемент матрицы  $P = Q^{-1}$ .

*Редукция к уравнениям для эквивалентного двухуровневого атома.* В эквивалентном двухуровневом атоме  $B_L^{(0)} = \alpha_L^* N_e^2$ . С учетом соотношения (2) уравнение баланса для возбужденного состояния имеет вид:

$$\beta + N_e^2 \alpha_L^* = N_L (\alpha_L^* N_e^2 / N_1^{(0)} + \sigma). \quad (5)$$

Если положить  $\alpha_L^* = -N_1^{(0)} / (N_e^2 P_{11})$ , то получаемое при решении (5) значение  $N_L^{(0)}$  становится идентичным значению  $N_1^{(1)}$ , определенному в (4). При этом как отношение  $N_1^{(0)} / N_e^2$ , определяемое из уравнения Саха, так и элементы матрицы  $P$  в принятых здесь предположениях зависят только от температуры.

Таким образом, в рамках многоуровневой модели может быть вычислен эффективный коэффициент рекомбинации на уровень  $n = 2$ , зависящий только от температуры плазмы и учитывающий и каскадные переходы, и вынужденные процессы. Интегрирование уравнений кинетики рекомбинации в рамках двухуровневого приближения с использованием полученных таким образом значений  $\alpha_L^*$  полностью эквивалентно интегрированию системы уравнений для многоуровневого атома в квазистационарном приближении.

При использовании предложенного выше метода для расчета эффективного коэффициента рекомбинации с использованием модельного атома с большим значением  $M$  наиболее вычислительно трудоемким этапом служит вычисление  $P = Q^{-1}$ . Если эту операцию выполнять внутри основного цикла интегрирования СОДУ кинетики рекомбинации для двухуровневой модели, то ожидаемые затраты вычислительных ресурсов сопоставимы с вычислительными ресурсами, необходимыми для прямого интегрирования СОДУ для многоуровневой модели с тем же значением  $M$ . Однако, поскольку

получаемые описанным выше образом значения эффективного коэффициента рекомбинации зависят только от температуры, то они могут быть однократно протабулированы для желаемого диапазона температур и затем многократно использоваться при расчете большого числа космологических моделей. В таком варианте описанный выше метод по вычислительной трудоемкости сравним с методом, использованным в программе RECFAST, а по точности и области применимости – с интегрированием уравнений для многоуровневой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 08-02-00493-а.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Я. Б. Зельдович, В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ **55**, 278 (1968).
- [2] P. J. E. Peebles, Astrophys. J. **153**, 1 (1968).
- [3] S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, Astrophys. J. Supp. **128**, 407 (2000).
- [4] S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, Astrophys. J. Letters **523**, L1 (1999).
- [5] D. Pequignot, P. Petitjean, and C. Boisson, Astron. Astrophys. **251**, 680 (1991).
- [6] W. A. Fendt, J. Chluba, J. A. Rubino-Martin, and B. D. Wandelt, ArXiv e-prints 0807.2577F (2008).
- [7] М. С. Бургин, Астрон. журн. **80**, 771 (2003).

Поступила в редакцию 10 октября 2008 г.