

УДК 533.9

КОЛЕБАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КРИСТАЛЛОВ

Н. Г. Гусейн-заде, А. М. Игнатов

Теоретически исследуются колебания и устойчивость линейной цепочки частиц с произвольным взаимодействием, удерживаемой в аксиально-симметричной потенциальной яме. Проанализированы частные случаи одноименных зарядов в вакууме и макрочастиц в плазме с учетом силы Лесажа. Показано, что непотенциальный характер притяжения приводит к появлению порога неустойчивости Джинса.

В последнее время возрос интерес к изучению квазикристаллических структур в сильно неидеальной плазме. Хотя впервые аналог кулоновского квазикристалла появился в классической модели атома, рассмотренной Дж. Дж. Томсоном более ста лет назад, за последние два десятилетия появилось несколько физических систем, в которых классические частицы образуют упорядоченные структуры. Плазменно-пылевые кристаллы часто образуются в плазме с примесью аэрозольной фазы. Можно сказать, что уже сформировалось новое направление – плазменно-пылевая кристаллография [1, 2]. Упорядоченные структуры также часто возникают в так называемой однокомпонентной плазме, например, в чисто электронной [3] или ионной [4] плазме в электромагнитных ловушках и ионных пучках в накопительных кольцах [5]. Наконец, переход к кристаллической фазе наблюдается в заряженных коллоидных суспензиях [6].

В основном специфика сильно неидеальной плазмы сводится к тому, что средняя энергия взаимодействия частиц может намного превосходить их среднюю тепловую энергию. Свойства такой системы характеризуются параметром неидеальности $\Gamma = Z^2 e^2 / aT$, т.е. отношением потенциальной энергии кулоновского взаимодействия к кинетической энергии теплового движения частицы, где $a = (3/4\pi N_p)^{1/3}$ – радиус

сферы, приходящейся на одну частицу (радиус Вигнера–Зейца) и N_p концентрация частиц с зарядом Ze . При определенных значениях Γ сильная межчастичная корреляция приводит к фазовым переходам типа газ–жидкость–твердое тело и возникновению пространственно упорядоченных структур. Для простейшей и наиболее изученной модели однокомпонентной плазмы известно, что при $\Gamma > 1$ в системе появляется ближний порядок, а при $\Gamma \simeq 170$ однокомпонентная плазма кристаллизуется [7].

Целью данной работы является теоретическое исследование спектров колебаний и устойчивости линейной бесконечной периодической цепочки частиц, как наиболее наглядной и допускающей простое решение конфигурации, с потенциалом взаимодействия $U_{int}(r)$, в пределе $\Gamma \gg 1$ когда энергия взаимодействия частиц намного превосходит их среднюю тепловую энергию.

Такие цепочки, разумеется, с конечным количеством частиц, экспериментально получались и исследовались, например, в [2, 8].

Для изучения свойств подобных образований используем следующую идеализированную модель. Пусть в равновесном состоянии частицы расположены вдоль оси z , удерживаются в поперечном направлении параболическим потенциалом и образуют цепочку с постоянным шагом. Внешний удерживающий потенциал может быть записан в виде:

$$U_{conf}(x, y) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x^2 + y^2), \quad (1)$$

где m – масса заряженной частицы, а ω_0 – характерная частота поперечных колебаний.

Динамика системы частиц с координатами $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ ($n = -\infty \dots -1, 0, 1 \dots \infty$) описывается уравнениями:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} + \nabla U_{conf}(x_n, y_n) = \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}, \quad (2)$$

где \mathbf{F}_{nk} – сила, с которой k -я частица действует на n -ю. Если межчастичное взаимодействие потенциально, причем потенциал взаимодействия $U_{int}(r) \equiv f(r^2)$, то сила $\mathbf{F} = -\nabla U_{int}(r) \equiv -2f'(r^2)\mathbf{r}$.

Уравнения движения теперь записываются в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r}_{\perp n} + \frac{2}{m} \sum_{k \neq n} f'(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2) (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k) = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y, 0)$.

Очевидно, что для любого потенциала взаимодействия существует стационарная конфигурация вида $\mathbf{r}_n^0 = (0, 0, na)$, где постоянная решетки a определяется средним числом частиц на единицу длины.

Представляя координаты частиц в виде $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^0 + \delta\mathbf{r}_n$, и ограничиваясь линейными по $\delta\mathbf{r}_n$ членами, получаем систему зацепляющихся уравнений

$$\frac{d^2\delta\mathbf{r}_n}{dt^2} + \omega_0^2\delta\mathbf{r}_{\perp n} + \frac{2}{m} \sum_{l \neq n} f'((n-l)^2 a^2)(\delta\mathbf{r}_n - \delta\mathbf{r}_l) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2\delta z_n}{dt^2} + \frac{2}{m} \sum_{l \neq n} [f'((n-l)^2 a^2) + 2(n-l)^2 a^2 f''((n-l)^2 a^2)](\delta z_n - \delta z_l) = 0. \quad (5)$$

Используя трансляционную инвариантность системы и представляя решение уравнений (4, 5) в виде

$$\delta\mathbf{r}_n(t) = \mathbf{A}_k e^{-i\omega t + isn},$$

$$\delta z_n(t) = B_k e^{-i\omega t + isn},$$

где безразмерное волновое число s принадлежит первой зоне Бриллюэна, $-\pi \leq s \leq \pi$, получаем искомые выражения для спектров поперечной

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \Omega_{\perp}^2(s) \quad (6)$$

и продольной

$$\omega^2 = \Omega_{\parallel}^2(s) \quad (7)$$

мод колебаний, где

$$\Omega_{\perp}^2(s) = \frac{8}{m} \sum_{l=1}^{\infty} f'(l^2 a^2) \sin^2(ls/2), \quad (8)$$

$$\Omega_{\parallel}^2(s) = \frac{8}{m} \sum_{l=1}^{\infty} (f'(l^2 a^2) + 2l^2 a^2 f''(l^2 a^2)) \sin^2(ls/2). \quad (9)$$

В силу очевидной симметрии поперечные колебания двукратно вырождены, так что в общем случае поперечная волна может быть представлена как суперпозиция двух линейно поляризованных волн.

Отметим некоторые общие свойства выражений (6, 7), следующие из вида сумм (8, 9). Любые неустойчивости в рассматриваемой системе могут быть только аperiодическими. Поскольку обе функции $\Omega_{\perp, \parallel}^2 \sim s^2$ при $s \rightarrow 0$, в длинноволновом пределе может быть неустойчивой только продольная волна. Это может случиться, если межчастичный потенциал на больших расстояниях носит притягивающий характер, и соответствует неустойчивости типа Джинса. Структурному фазовому переходу соответствует обращение в нуль одной из частот (6, 7) при $s \neq 0$. Очевидно, что для потенциала общего вида неустойчивой может оказаться как продольная, так и поперечная волна.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Одноименные заряды. Линейные цепочки одноименно заряженных ионов, взаимодействующие между собой посредством кулоновского потенциала, формируются в ячейках Пеннинга, в высокочастотных ловушках Пауля и в накопительных кольцах. Поскольку потенциал $U_{int}(r) = q^2/r$, где q – заряд иона, $f(x) = q^2/\sqrt{x}$ и собственные частоты (6, 7) принимают вид

$$\omega_{\perp}^2 = \omega_0^2(1 - \eta S(s)), \tag{10}$$

$$\omega_{\parallel}^2 = 2\omega_0^2\eta S(s), \tag{11}$$

где безразмерный параметр $\eta = 4q^2/ma^3\omega_0^2$, а функция

$$S(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2(sl/2)}{l^3}, \tag{12}$$

график которой изображен на рис. 1, периодична с периодом 2π и принимает максимальное значение, равное $S_{max} = 7\zeta(3)/8 \approx 1.0518$, при $s = \pi$. Здесь $\zeta(n)$ – функция Римана. Функция $S(s)$ всегда положительна, причем при $s \rightarrow 0$

$$S(s) \approx \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\ln s\right) s^2. \tag{13}$$

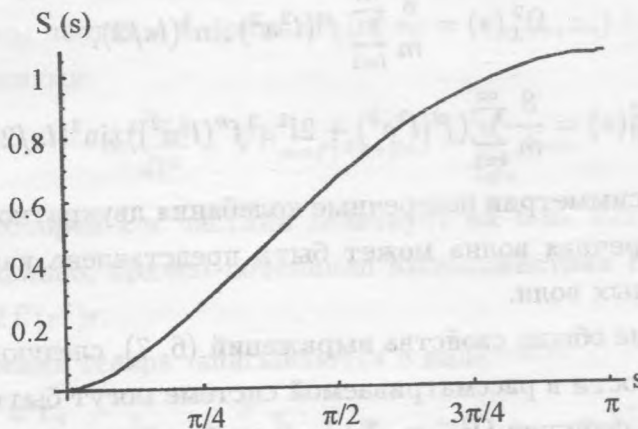


Рис. 1. Безразмерная частота продольных колебаний кулоновской цепочки.

Поскольку $S(s) \geq 0$, продольные колебания цепочки ионов всегда устойчивы. В то же время, при достаточно большой величине параметра $\eta > \eta_0 = 1/S_{max} \approx 1$, поперечные колебания с $s \approx \pi$ становятся неустойчивыми. В точке бифуркации $\eta = \eta_0$, $s = \pi$

поляризация стационарной ($\omega = 0$) поперечной волны соответствует зигзагообразному смещению частиц, например, $x_n \sim (-1)^n$, $y_n = 0$.

Как численное моделирование [9], так и результаты экспериментов [10] показывают, что с изменением внешних управляющих параметров (будь то параметр ловушки или линейная плотность), линейная цепочка действительно теряет устойчивость и превращается в зигзаг, при этом параметр $\eta \approx 1$.

Потенциал Юкавы и сила Лесажа. В некоторых случаях взаимодействие между макрочастицами описывается экранированным кулоновским потенциалом, или потенциалом Юкавы. Помимо электрического взаимодействия макрочастиц, существенную роль могут играть и другие силы. В частности, притягивающее взаимодействие, называемое силой Лесажа, возникает из-за асимметричной бомбардировки ионами поверхности макрочастиц [1, 11]. Такое незлектрическое притяжение не экранируется плазмой, его сила обратно пропорциональна квадрату расстояния. Оно может быть достаточно сильным для того, чтобы сформировать связанные комплексы макрочастиц.

Для учета как притягивающих, так и отталкивающих сил между макрочастицами в плазме часто вводится модельный потенциал:

$$U(r) = \frac{q^2}{r} (e^{-r/r_d} - \beta), \quad (14)$$

где параметр β характеризует величину силы притяжения.

Суммы (8, 9) теперь принимают вид:

$$\Omega_{\perp}^2 = \omega_0^2 \eta (\beta S(s) - S_{\perp}(s, \lambda)), \quad (15)$$

$$\Omega_{\parallel}^2 = \omega_0^2 \eta (-2\beta S(s) + S_{\parallel}(s, \lambda)), \quad (16)$$

где

$$S_{\perp}(s, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 + l\lambda}{l^3} e^{-l\lambda} \sin^2(ls/2), \quad (17)$$

$$S_{\parallel}(s, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 + (1 + l\lambda)^2}{l^3} e^{-l\lambda} \sin^2(ls/2) \quad (18)$$

и $\lambda = a/r_d$.

Графики сумм (17, 18) для различных значений λ изображены на рис. 2. Как можно видеть из приведенных графиков, при увеличении λ устойчивость поперечных колебаний улучшается, тогда как частота продольных колебаний уменьшается. Более того, легко убедиться, что вследствие логарифмической зависимости в (13), вполне естественной для далекодействующего потенциала, всегда существует область достаточно малых

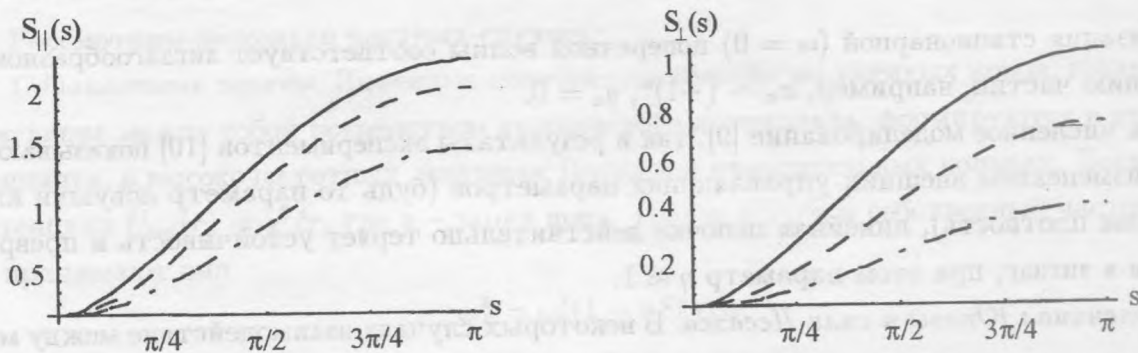


Рис. 2. Зависимости $S_{||}(s, \lambda)$ и $S_{\perp}(s, \lambda)$ для потенциала Юкавы и силы Лесажа. $\lambda = 0.1$ - сплошная линия, $\lambda = 1$ - пунктир, $\lambda = 2$ - штрих-пунктир.

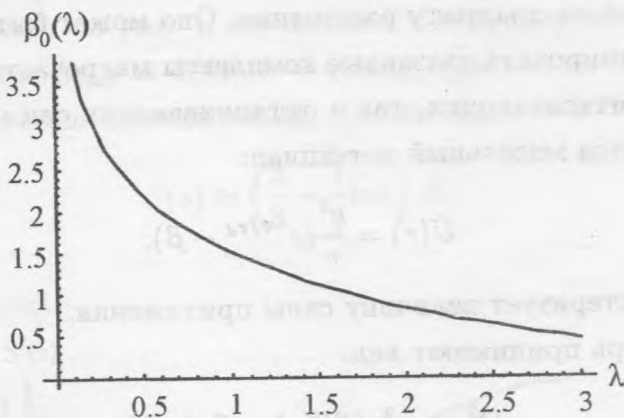


Рис. 3. Порог неустойчивости Джинса $\beta_0(\lambda)$.

s , в которой $\Omega_{||}^2 < 0$ (16). Эта длинноволновая неустойчивость является аналогом известной гравитационной неустойчивости Джинса.

Как отмечалось в [11], взаимодействие Лесажа не является потенциальным. В частности, это проявляется в том, что если все частицы находятся на оси z , то на любую из них действует сила Лесажа лишь со стороны ближайших соседей. Если же частицы смещаются в поперечном направлении на расстояние, большее их размера, то вероятность затенения частицами друг друга мала, и для расчета силы необходимо учитывать влияние всех частиц. Таким образом, выражение (15) описывает в действительности поперечные колебания достаточно большой амплитуды. Что же касается продольных

колебаний, то учет притяжения только ближайших соседей приводит к следующему выражению для частоты:

$$\omega_{\parallel}^2 = \omega_0^2 \eta (S_{\parallel}(s, \lambda) - 2\beta \sin^2(s/2)). \quad (19)$$

Условие $\Omega_{\parallel}^2 < 0$ теперь может быть выполнено лишь при достаточно большой силе притяжения $\beta > \beta_0(\lambda)$; график $\beta_0(\lambda)$ изображен на рис. 3. Таким образом, непотенциальный характер силы Лесажа приводит к появлению порога неустойчивости Джинса.

Работа выполнена при поддержке Нидерландской научной организации (NWO, грант 047-008-013) и программы Интеграция, проект A0029.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Цытович В. Н. УФН, **167**, 57 (1997).
- [2] Нефедов А. П., Петров О. Ф., Фортон В. Е. УФН, **167**, 1215 (1997).
- [3] Malmberg J. H. and O'Neil. Phys. Rev. Lett., **39**, 1333 (1977).
- [4] Bollinger J. J. and Wineland D. J. Phys. Rev. Lett., **53**, 348 (1984).
- [5] Rahman A. and Shiffer J. P. Phys. Rev. Lett., **57**, 1133 (1986).
- [6] Clark N. A., Hurd A. J., and Ackerson B. J. Nature, **281**, 57 (1979).
- [7] Ishimaru S. Rev. Mod. Phys., **54**, 1017 (1982).
- [8] Фортон В. Е., Нефедов А. П., Торчинский В. М. и др. Письма в ЖЭТФ, **64**, 86 (1996).
- [9] Schiffer J. P. Phys. Rev. Lett., **70**, 818 (1993).
- [10] Raizen M. G., Gilligan J. M., Bergquist J. C., Itano W. M., and Wineland D. J. Phys. Rev., **A45**, 6493 (1992).
- [11] Игнатов А. М. Физика плазмы, **22**, 648 (1996).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 12 сентября 2001 г.