УДК 533.951

ИНКРЕМЕНТЫ "КОРОТКОВОЛНОВОЙ" МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКИХ СПЕКТРОВ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

С. И. Попель[1]

Получены инкременты "коротковолновой" модуляционной неустойчивости спектров ленгмюровских волн для различных ситуаций. Показано, что существует ряд случаев, когда ее развитие существенным образом отличается от развития "коротковолновой" модуляционной неустойчивости монохроматической волны накачки.

Модуляционная неустойчивость широких спектров ленгмюровских волн изучалась в работах [1–3]. При этом в [1,2] были рассмотрены инкременты "коротковолновой" модуляционной неустойчивости лишь в некоторых частных случаях, тогда как в [3] затрагивался лишь вопрос об инкрементах "длинноволновой" модуляционной неустойчивости. Вместе с тем, исследование модуляционной неустойчивости широких спектров нижнегибридных волн [4] показало, что в "коротковолновом" режиме развитие модуляционной неустойчивости одномерных спектров нижнегибридных волн весьма сходно с ее развитием для монохроматической волны накачки. Этот вывод важен для описания ряда экспериментальных ситуаций, например, при описании токов увлечения нижнегибридными волнами [4, 5], где должна быть учтена конечная ширина (в **k**–пространстве) спектра нижнегибридных волн [6]. Представляет интерес выяснить, является ли вывод о схожести развития "коротковолновой" модуляционной неустойчивости для волновых спектров и для монохроматической волны накачки общим для всех типов волн во всех ситуациях. К сожалению, результаты работ [1, 2] недостаточны для ответа на этот вопрос для случая ленгмюровских волн.

---

[1]Институт динамики геосфер РАН. Работа выполнена в Институте общей физики РАН

Целью данной работы является детальное изучение “коротковолновой” модуляционной неустойчивости широких спектров ленгмюровских волн и ее сопоставление с ”коротковолновой” модуляционной неустойчивостью монохроматической волны накачки. Будет продемонстрировано, что даже в случае одномерных спектров ленгмюровских волн их развитие существенно отличается друг от друга.

Случай ”коротковолновой” модуляционной неустойчивости спектров ленгмюровских волн соответствует следующим неравенствам: $|\mathbf{k}'| \gg |\mathbf{k}|$, $|\mathbf{k}'| \gg |\delta\mathbf{k}|$, где $|\mathbf{k}|$ – характерная длина волнового вектора в спектре, $|\delta\mathbf{k}|$ – характерная ширина (в $\mathbf{k}$–пространстве) спектра волн, $\mathbf{k}'$ – волновой вектор модуляционных возмущений. Модуляционная неустойчивость описывается следующей системой уравнений для корреляционных функций $G^{\pm}_{k,k'}$ [1]:

$$(\varepsilon_{k+k'} + \varepsilon^N_{k+k'})G^+_{k,k'} = |E^{+(0)}|^2_k \Big\{ \int \frac{[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}][(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}+\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1+\mathbf{k}'|}\alpha_{k'}G^+_{k_1,k'}dk_1 +$$

$$+\int \frac{[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}')][\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}+\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1+\mathbf{k}'|}\alpha_{k-k_1}G^+_{k_1,k'}dk_1 + \int \frac{[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}][(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}+\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'|}\alpha_{k'}G^-_{k_1,k'}dk_1 + \quad (1)$$

$$+\int \frac{[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1][(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}+\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'|}\alpha_{k-k_1+k'}G^-_{k_1,k'}dk_1 \Big\},$$

$$(\varepsilon_{-k+k'} + \varepsilon^N_{-k+k'})G^-_{k,k'} = |E^{+(0)}|^2_k \Big\{ \int \frac{[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}][(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}-\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'|}\alpha_{k'}G^-_{k_1,k'}dk_1 +$$

$$+\int \frac{[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')][\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}-\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'|}\alpha_{k-k_1}G^-_{k_1,k'}dk_1 + \int \frac{[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}][(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}-\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1+\mathbf{k}'|}\alpha_{k'}G^+_{k_1,k'}dk_1 + \quad (2)$$

$$+\int \frac{[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1][(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}]}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}-\mathbf{k}'||\mathbf{k}_1+\mathbf{k}'|}\alpha_{k-k_1-k'}G^+_{k_1,k'}dk_1 \Big\},$$

где 4-векторы k и k_1 ($k = \{\omega, \mathbf{k}\}$) относятся к волнам в спектре, тогда как $k' = \{\omega', \mathbf{k}'\}$ описывает модуляционные возмущения, $|E^{+(0)}|^2_k$ – корреляционная функция полей ленгмюровских волн в спектре, ε_k – линейная диэлектрическая проницаемость, ε^N_k – нелинейная диэлектрическая проницаемость:

$$\varepsilon^N_{\pm k+k'} = -\int \frac{[(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}_1]^2}{|\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'|^2|\mathbf{k}_1|^2}\alpha_{\pm k\mp k_1+k'}|E^{+(0)}|^2_{k_1}dk_1; \quad (3)$$

$$\alpha_{k'} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi n_0 T_e}\dfrac{|\mathbf{k}'|^2 v_s^2}{\omega'^2 - |\mathbf{k}'|^2 v_s^2} & \text{если } |\mathbf{k}'|v_{Ti} \ll \omega' \ll |\mathbf{k}'|v_{Te}, \\ -\dfrac{1}{4\pi n_0(T_e+T_i)} & \text{если } \omega' \ll |\mathbf{k}'|v_{Ti}, \end{cases} \quad (4)$$

где n_0 – невозмущенная концентрация электронов, $T_{e(i)}$ – электронная (ионная) температура, $v_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ – скорость звука, $v_{Te(i)} = (T_{e(i)}/m_{e(i)})^{1/2}$ – тепловая скорость электронов (ионов), $m_{e(i)}$ – масса электрона (иона). Ниже предполагается, что $T_i \ll T_e$. Дисперсионное уравнение для модуляционной неустойчивости представляет собой условие разрешимости системы уравнений (1), (2).

Рассмотрим случай, когда выполнены неравенства: $\omega' \ll \delta\omega \ll |\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega \ll |\delta\mathbf{k}|v_s$. Здесь $\delta\omega$ – ширина волнового спектра по частотам. В этом случае $\alpha_{k'} \approx \alpha_{k-k_1} \approx \alpha_{k-k_1\pm k'} \approx -1/4\pi n_0 T_e$. Найти условие разрешимости системы уравнений (1), (2) удается в предположении, что спектр волн в $\mathbf{k}$–пространстве – одномерный, а модуляционные возмущения распространяются под углом θ по отношению к направлению распространения волн в спектре. При этом $\varepsilon^N_{\pm k+k'} \approx \cos^2\theta\varepsilon^N_{\pm k}$, а уравнения (1), (2) могут быть представлены в виде:

$$\left(\varepsilon_{\pm k+k'} + \cos^2\theta\varepsilon^N_{\pm k}\right) G^{\pm}_{k,k'} = -\frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e}\int dk_1 \left[\left(1+\cos^2\theta\right) G^{\pm}_{k_1,k'} - 2\cos^2\theta G^{\mp}_{k_1,k'}\right]. \tag{5}$$

Введем функции

$$S^{\pm}_{k'} = \int dk_1 G^{\pm}_{k_1,k'}. \tag{6}$$

Из уравнения (5) получаем:

$$S^{\pm}_{k'} = -I^{\pm}_{k'}\left[\left(1+\cos^2\theta\right) S^{\pm}_{k'} - 2\cos^2\theta S^{\mp}_{k'}\right], \tag{7}$$

где

$$I^{\pm}_{k'} = \int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e}\frac{1}{\varepsilon_{\pm k+k'} + \cos^2\theta\varepsilon^N_{\pm k}}.$$

Исключая $S^{\pm}_{k'}$ из уравнений (7), находим дисперсионное уравнение для рассматриваемого случая:

$$1 = \frac{4\cos^4\theta I^{+}_{k'} I^{-}_{k'}}{\left(1+[1+\cos^2\theta]I^{+}_{k'}\right)\left(1+[1+\cos^2\theta]I^{-}_{k'}\right)}. \tag{8}$$

Представляя $\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k}$ в явном виде, следует соответствующим образом "перенормировать" частоту ленгмюровских волн [7], включив в нее нелинейный сдвиг так, что $\varepsilon_k + \varepsilon^N_k = 0$. Таким образом, $\varepsilon_{\pm k+k'} + \cos^2\theta\varepsilon^N_{\pm k} \approx \pm 2\omega'/\omega_{pe} - 3|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}/\omega^2_{pe} + (\cos^2\theta -$

1) $\int dk_1|E^{+(0)}|^2_{k_1}/4\pi n_0T_e$, где ω_{pe} – электронная плазменная частота. Записывая уравнение (8) в явном виде, получаем

$$\frac{\omega'^2}{\omega_{pe}^2}=\frac{9}{4}\frac{|\mathbf{k}'|^4v_{Te}^4}{\omega_{pe}^4}-3\frac{|\mathbf{k}'|^2v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}\cos^2\theta\int dk\frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0T_e}. \tag{9}$$

Уравнение (9) позволяет вычислить инкремент модуляционной неустойчивости γ ($\omega'=i\gamma$). Неустойчивость имеет место при

$$\int dk\frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0T_e}>\frac{3}{4}\frac{|\mathbf{k}'|^2v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}. \tag{10}$$

Максимальное значение инкремента $\gamma_{\max}$ достигается, когда левая часть неравенства (10) значительно превосходит его правую часть, а $\cos^2\theta=1$, т.е. модуляционные возмущения распространяются параллельно направлению распространения волн в спектре. Оно равно

$$\gamma_{\max}=\sqrt{2}|\mathbf{k}'|\tilde{v}, \tag{11}$$

где

$$\tilde{v}^2=\frac{3}{8\pi}\int dk\frac{|E^{+(0)}|^2_k}{n_0m_e} \tag{12}$$

представляет собой квадрат амплитуды движения электрона в поле волн. Итак, как и в случае *одномерной* модуляционной неустойчивости монохроматической волны накачки (где $\gamma_{\max}=|\mathbf{k}'|\tilde{v}$ при $\tilde{v}\ll v_s$ (см., например, [8])), максимальный инкремент неустойчивости в рассматриваемой ситуации определяется значением $\tilde{v}$. В этом смысле имеется аналогия между развитием модуляционной неустойчивости монохроматической ленгмюровской волны накачки и спектра ленгмюровских волн при $\omega'\ll\delta\omega\ll|\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega\ll|\delta\mathbf{k}|v_s$. Подобные выводы остаются справедливыми также и для случая $\delta\omega\ll\omega'\ll|\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega\ll|\delta\mathbf{k}|v_s$, рассмотрение которого полностью аналогично проведенному выше.

Рассмотрим случай $\omega'\ll\delta\omega\ll|\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega\gg|\delta\mathbf{k}|v_s$. В этом случае $\alpha_{k'}\approx\alpha_{k-k_1\pm k'}\approx-1/4\pi n_0T_e$, $|\alpha_{k-k_1}|\ll|\alpha_{k'}|$, а $|\varepsilon^N_k|\ll|\varepsilon^N_{\pm k+k'}|$. Система уравнений (1), (2) может быть представлена в виде:

$$\left(\varepsilon_{\pm k+k'}+\varepsilon^N_{\pm k+k'}\right)G^{\pm}_{k,k'}=-\frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0T_e}\int dk_1\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}')}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}'|^2}\left(G^{\pm}_{k_1,k'}-2G^{\mp}_{k_1,k'}\right). \tag{13}$$

Обозначим на этот раз

$$S^{\pm}_{k'} = \int dk_1 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}')}{|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}'|} G^{\pm}_{k_1,k'}. \tag{14}$$

Из уравнений (13) находим

$$S^{\pm}_{k'} = -I^{\pm}_{k'} \left(S^{\pm}_{k'} - 2S^{\mp}_{k'} \right), \tag{15}$$

где

$$I^{\pm}_{k'} = \int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{|\mathbf{k}|^2|\mathbf{k}'|^2} \frac{1}{\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'}},$$

$$\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'} \approx \pm 2\frac{\omega'}{\omega_{pe}} - 3\frac{|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}}{\omega^2_{pe}} + \int dk_1 \frac{|E^{+(0)}|^2_{k_1}}{4\pi n_0 T_e} \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}_1)^2}{|\mathbf{k}'|^2|\mathbf{k}_1|^2}.$$

Дисперсионное уравнение для модуляционной неустойчивости принимает вид:

$$1 = \frac{4I^+_{k'}I^-_{k'}}{\left(1 + I^+_{k'}\right)\left(1 + I^-_{k'}\right)}. \tag{16}$$

В рассматриваемой ситуации удается полностью рассмотреть случаи, когда спектр волн в $\mathbf{k}$–пространстве одномерный или изотропный. В случае одномерного спектра волн дисперсионное уравнение (16) может быть преобразовано к виду (9). Соответственно, справедливо условие (10), а максимальный инкремент дается формулой (11). В случае изотропного спектра волн дисперсионное уравнение совпадает с (9), в котором произведена замена $\cos^2\theta \longrightarrow 1/3$. Таким образом, в случае изотропного спектра неустойчивость возникает при

$$\int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} > \frac{9}{4} \frac{|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}}{\omega^2_{pe}}, \tag{17}$$

а максимальное значение инкремента равно

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\mathbf{k}'| \tilde{v}. \tag{18}$$

Случай $\delta\omega \ll \omega' \ll |\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega \gg |\delta\mathbf{k}|v_s$ рассматривается аналогично случаю $\omega' \ll \delta\omega \ll |\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega \gg |\delta\mathbf{k}|v_s$.

Рассмотрим ситуацию $\omega' \ll \delta\omega$, $\delta\omega \gg |\mathbf{k}'|v_s$. В этом случае $|\alpha_{k'}| \gg |\alpha_{k-k_1}|$, $|\alpha_{k'}| \gg |\alpha_{k-k_1\pm k'}|$, а значения $\varepsilon^N_k G^{\pm}_{k,k'}$, $\varepsilon^N_{k+k'} G^{\pm}_{k,k'}$ пренебрежимо малы по сравнению с правыми частями уравнений (1), (2). Уравнения (1), (2) преобразуются к виду:

$$\varepsilon_{\pm k+k'} G^{\pm}_{k,k'} = \alpha_{k'} |E^{+(0)}|^2_k \int dk_1 \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}')}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}'|^2} \left(G^{\pm}_{k_1,k'} - G^{\mp}_{k_1,k'} \right). \tag{19}$$

Условие разрешимости этих уравнений относительно $G^{\pm}_{k,k'}$ имеет вид

$$1 = \alpha_{k'} \int dk \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{|\mathbf{k}|^2|\mathbf{k}'|^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+k'}} + \frac{1}{\varepsilon_{-k+k'}} \right) |E^{+(0)}|^2_k. \tag{20}$$

Уравнение (20) является дисперсионным уравнением для модуляционной неустойчивости в рассматриваемом случае. При вычислении $\varepsilon_{\pm k+k'}$ в (20) следует учеть малость ε^N_k в данной ситуации и считать, что $\varepsilon_k \approx 0$. Правая часть приближенного выражения

$$\frac{1}{\varepsilon_{k+k'}} + \frac{1}{\varepsilon_{-k+k'}} \approx \frac{6|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}/\omega^2_{pe}}{4\omega'^2/\omega^2_{pe} - 9|\mathbf{k}'|^4 v^4_{Te}/\omega^4_{pe}}$$

не содержит $\mathbf{k}$ и ω. Таким образом, множитель, содержащий $\varepsilon_{\pm k+k'}$ в (20), может быть вынесен за знак интеграла в рассматриваемой ситуации. Учитывая зависимость $\alpha_{k'}$ (см. (4)), нетрудно показать, что уравнение (20) превращается в дисперсионное уравнение, описывающее "коротковолновую" модуляционную неустойчивость монохроматической волны накачки (см. (2.147) в [8]), если сделать следующую замену:

$$\int dk \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{|\mathbf{k}|^2|\mathbf{k}'|^2} |E^{+(0)}|^2_k \longrightarrow \frac{(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{k}')^2}{|\mathbf{k}_0|^2|\mathbf{k}'|^2} \frac{|E_0|^2}{2} \tag{21}$$

и учесть, что $|\mathbf{k}'| \gg |\mathbf{k}_0|$. Здесь $\mathbf{k}_0$ – волновой вектор монохроматической волны накачки, E_0 – ее амплитуда. Таким образом, в данной ситуации развитие модуляционной неустойчивости спектров волн аналогично ее развитию для случая монохроматической волны накачки.

Рассмотрим случай $\omega' \gg \delta\omega$, $\omega' \gg |\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega \ll |\delta\mathbf{k}|v_s$. В этом случае $|\alpha_{k'}| \approx |\alpha_{k-k_1\pm k'}| \ll |\alpha_{k-k_1}|$, $\alpha_{k-k_1} \approx -1/4\pi n_0 T_e$, а $|\varepsilon^N_k| \gg |\varepsilon^N_{\pm k+k'}|$. Уравнения (1), (2) могут быть записаны в виде:

$$\left(\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'} \right) G^{\pm}_{k,k'} = -\frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \int dk_1 \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1|} G^{\pm}_{k_1,k'}. \tag{22}$$

В случае одномерного спектра волн (когда $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)/|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1| = 1$) из уравнения (22) для $G^{+}_{k,k'}$ следует, что

$$1 = -\int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \frac{1}{\varepsilon_{k+k'} + \varepsilon^N_{k+k'}}. \tag{23}$$

При вычислении $\varepsilon_{k+k'} + \varepsilon^N_{k+k'}$ следует учесть, что $|\varepsilon^N_k| \gg |\varepsilon^N_{k+k'}|$ и $\varepsilon_k + \varepsilon^N_k = 0$. Таким образом,

$$\varepsilon_{k+k'} + \varepsilon^N_{k+k'} \approx 2\frac{\omega'}{\omega_{pe}} - 3\frac{|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}}{\omega^2_{pe}} - \varepsilon^N_k = 2\frac{\omega'}{\omega_{pe}} - 3\frac{|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}}{\omega^2_{pe}} - \int dk_1 \frac{|E^{+(0)}|^2_{k_1}}{4\pi n_0 T_e}.$$

Из уравнения (23) получаем:

$$2\frac{\omega'}{\omega_{pe}} - 3\frac{|\mathbf{k}'|^2 v^2_{Te}}{\omega^2_{pe}} = 0. \tag{24}$$

Неустойчивость в данном случае отсутствует. Изотропный случай рассматривается аналогично. Для этого надо ввести аналогично [1] векторы

$$\mathbf{G}^{\pm}_{k'} = \int dk \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} G^{\pm}_{k,k'}$$

и учесть в уравнениях для $\mathbf{G}^{\pm}_{k'}$ (являющихся следствием (22))

$$\mathbf{G}^{\pm}_{k'} = -\int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \frac{1}{\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{G}^{\pm}_{k'})}{|\mathbf{k}|^2}, \tag{25}$$

что в изотропном случае единственным выделенным направлением, вдоль которого может быть направлен $\mathbf{G}^{\pm}_{k'}$, является $\mathbf{k}'$. В рассматриваемой ситуации неустойчивость изотропного спектра отсутствует.

Рассмотрим случай $\omega' \gg \delta\omega \gg |\delta\mathbf{k}|v_s$, $\omega' \gg |\mathbf{k}'|v_s$. В этой ситуации удается найти условие совместной разрешимости уравнений (1), (2) при $|\mathbf{k}'|^2 v_s^2/\omega'^2 \gg |\delta\mathbf{k}|^2 v_s^2/\delta\omega^2$, когда $|\alpha_{k'}| \approx |\alpha_{k-k_1\pm k'}| \gg |\alpha_{k-k_1}|$, а $|\varepsilon^N_k| \ll |\varepsilon^N_{\pm k+k'}|$. Уравнения (1), (2) при этом принимают вид

$$\left(\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'}\right) G^{\pm}_{k,k'} = \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \int dk_1 \frac{|\mathbf{k}'|^2 v_s^2}{\omega'^2} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}')}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}'|^2} \left(G^{\pm}_{k_1,k'} - 2G^{\mp}_{k_1,k'}\right). \tag{26}$$

Для решения (26) можно использовать $S^{\pm}_{k'}$ в форме (14). Из (26) получаем следующие соотношения:

$$S^{\pm}_{k'} = I^{\pm}_{k'}\left(S^{\pm}_{k'} - 2S^{\mp}_{k'}\right), \tag{27}$$

где

$$I^{\pm}_{k'} = \frac{|\mathbf{k}'|^2 v_s^2}{\omega'^2} \int dk \frac{|E^{(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{|\mathbf{k}|^2|\mathbf{k}'|^2} \frac{1}{\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'}},$$

$$\varepsilon_{\pm k+k'} + \varepsilon^N_{\pm k+k'} \approx \pm 2\frac{\omega'}{\omega_{pe}} - 3\frac{|\mathbf{k}'|^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2 v_s^2}{\omega'^2}\int dk_1 \frac{|E^{+(0)}|^2_{k_1}}{4\pi n_0 T_e}\frac{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}_1)^2}{|\mathbf{k}'|^2|\mathbf{k}_1|^2}.$$

Используя (27), находим дисперсионное уравнение для модуляционной неустойчивости в рассматриваемом случае:

$$1 = \frac{4I^+_{k'}I^-_{k'}}{\left(1 - I^+_{k'}\right)\left(1 - I^-_{k'}\right)}. \tag{28}$$

В случае одномерного (в $\mathbf{k}$–пространстве) спектра дисперсионное уравнение (28) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\omega'^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{9}{4}\frac{|\mathbf{k}'|^4 v_{Te}^4}{\omega_{pe}^4} + 3\frac{|\mathbf{k}'|^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}\frac{|\mathbf{k}'|^2 v_s^2}{\omega'^2}\cos^2\theta \int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e}. \tag{29}$$

Уравнение (29) может быть преобразовано к виду биквадратного уравнения, которое имеет неустойчивое решение с инкрементом:

$$\gamma = \left[\sqrt{\left(\frac{9}{8}\frac{|\mathbf{k}'|^4 v_{Te}^4}{\omega_{pe}^2}\right)^2 + 2\cos^2\theta|\mathbf{k}'|^4 v_s^2\tilde{v}^2} - \frac{9}{8}\frac{|\mathbf{k}'|^4 v_{Te}^4}{\omega_{pe}^2}\right]^{1/2}. \tag{30}$$

Максимальный инкремент $\gamma_{\max} = 2^{1/4}|\mathbf{k}'|\sqrt{v_s\tilde{v}}$ (по виду, с точностью до численного множителя, совпадающий с соответствующим инкрементом *одномерной* неустойчивости монохроматической волны накачки (см., например, (2.156) в [8])) реализуется при $\cos^2\theta = 1$ и

$$\int dk \frac{|E^{+(0)}|^2_k}{4\pi n_0 T_e} \gg \frac{|\mathbf{k}'|^4 v_{Te}^4}{\omega_{pe}^4}\frac{m_i}{m_e}. \tag{31}$$

В случае изотропного (в $\mathbf{k}$–пространстве) спектра волн дисперсионное уравнение для модуляционной неустойчивости совпадает с (29), в котором произведена замена $\cos^2\theta \longrightarrow 1/3$. Таким образом, максимальный инкремент в этом случае реализуется при условии (31) и имеет вид:

$$\gamma_{\max} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}|\mathbf{k}'|\sqrt{v_s\tilde{v}}, \tag{32}$$

где $\tilde{v}$ дается выражением (12).

Таким образом, во многих случаях максимальные инкременты "коротковолновой" модуляционной неустойчивости с точностью до численного множителя порядка единицы совпадают с максимальными инкрементами неустойчивости монохроматической волны. Тем не менее, существуют ситуации (например, при $\omega' \gg \delta\omega$, $\omega' \gg |\mathbf{k}'|v_s$, $\delta\omega \ll |\delta\mathbf{k}|v_s$), когда развитие "коротковолновой" модуляционной неустойчивости спектров волн существенным образом отличается от развития "коротковолновой" модуляционной неустойчивости монохроматической волны накачки. Это связано, в частности, с тем, что в спектре каждая мода не может быть неустойчивой независимо от других мод. Становятся существенными их корреляции [8], и в ряде случаев происходит подавление неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Popel S.I., Tsytovich V.N., and Vladimirov S.V., Phys. Plasmas, **1**, 2176 (1994).

[2] Popel S.I. and Tsytovich V.N., Contrib. Plasma Phys., **34**, 695 (1994).

[3] Vladimirov S.V. and Popel S.I., Phys. Rev. E, **51**, 2390 (1995).

[4] Попель С.И., Препринт ИОФАН N 4, М., 1997.

[5] Popel S.I. and Tsytovich V.N., Contrib. Plasma Phys., **32**, 77 (1992).

[6] Fisch N.J., Rev. Mod. Phys., **59**, 175 (1987).

[7] Tsytovich V.N., Lectures on Non-Linear Plasma Kinetics. Berlin, Springer, 1995.

[8] Vladimirov S.V., Tsytovich V.N., Popel S.I., and Khakimov F. Kh. Modulational Interactions in Plasmas. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995.

Поступила в редакцию 25 апреля 1997 г.