УДК 536.75

О ВОСПРИИМЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БИСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С. А. Решетняк

Показано, что в цепочке слабовзаимодействующих бистабильных элементов возникает внутреннее поле, которое приводит к образованию областей с аномальной восприимчивостью, что подобно поведению восприимчивости бистабильной системы при эффекте стохастического резонанса.

При неравновесных фазовых переходах, индуцированных шумом, возникает стохастический резонанс [1, 2]. В теоретических работах (см., например, [3]) данное явление достаточно полно проанализировано для изолированной бистабильной системы. Ансамбль взаимодействующих бистабильных элементов исследован недостаточно, хотя численный эксперимент [4] указывает на существование здесь данного эффекта. В настоящей работе предложено аналитическое исследование одномерной системы бистабильных элементов со слабой связью и проанализирована восприимчивость к постоянному малому внешнему полю.

Пусть поведение ансамбля описывается следующими ланжевеновскими уравнениями для параметра порядка $\bar{\eta}$:

$$\frac{d\eta_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_n} + \xi_n(t), \tag{1}$$

$$H = W + gV,\ W = \sum_{n=1}^{N} U(\eta_n),\ V = -\sum_{n=1}^{N} \eta_n \eta_{n+1},$$

$$\langle \xi_n(t) \rangle = 0,\ \langle \xi_n(t)\xi_m(t') \rangle = 2D\delta_{nm}\delta(t-t'),$$

где $U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 - Fx$, F – внешнее поле, W – потенциал невзаимодействующих бистабильных систем, g – постоянная связи, $\xi_n(t)$ – случайные силы или шум, D – интенсивность шума. В качестве граничных условий на концах цепочки приняты условия цикличности $\eta_{N+1} = \eta_1$ (N – число бистабильных элементов в цепочке).

Рассмотрим соответствующее (1) кинетическое уравнение для функции распределения $G(\bar{\eta}, t)$:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_n \frac{\partial}{\partial \eta_n}\left(H'_n G + D\frac{\partial G}{\partial \eta_n}\right) = -\sum_n \frac{\partial I_n}{\partial \eta_n}, \tag{2}$$

$$I_n|_{\eta_n \to \pm\infty} = 0,\ G|_{t=0} = \delta(\bar{\eta} - \bar{\xi}),$$

$\bar{\xi}$ – вектор начальных значений.

Для слабых взаимодействий ($g \ll Db/a$) решение (2) можно искать в первом порядке теории возмущений по константе связи: $G = P + gQ$. Будем интересоваться средним значением параметра порядка для элемента n:

$$\langle \eta_n \rangle = \int \eta_n P_n d\eta_n + g \int \eta_n Q_n d\eta_n = \langle \eta_n \rangle_P + \langle \eta_n \rangle_Q,$$

где $P_n = \int P \overline{d\eta}_{(n)}$, $Q_n = \int Q \overline{d\eta}_{(n)}$. В формулах для одноузельных функций распределения P_n и Q_n интегрирование проводится по всем переменным, кроме η_n.

Заменяя в (2) G на $G = P + gQ$ и приравнивая члены с одинаковыми степенями g, приходим к уравнениям для P и Q. Уравнение для P описывает систему невзаимодействующих узлов, поэтому $P = \prod\limits_{n=1}^{N} P_n$. Каждая из одноузельных функций распределения определяется решением уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0,\ I = \left(U'f + D\frac{\partial f}{\partial \eta}\right), \tag{3}$$

$$I|_{\eta \to \pm\infty} = 0,\ f|_{t=0} = \delta(\eta - \xi),\ \int f d\eta = 1,\ f|_{\eta=\eta_n, \xi=\xi_n} = P_n.$$

Взаимодействие между узлами учитывается в уравнении для Q_n, которое имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \eta} = -\frac{\partial f_\xi}{\partial \eta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(f_{\xi'} + f_{\xi''})dx,\ J = -\left(U'\Psi + D\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right), \tag{4}$$

$$J|_{\eta \to \pm\infty} = 0,\ \Psi|_{t=0} = 0,\ \int \Psi d\eta = 0,\ \Psi|_{\eta=\eta_n} = Q_n,$$

где f_ξ, $f_{\xi'}, f_{\xi''}$ – решение (3) соответственно с начальными значениями $\xi_n, \xi_{n-1}, \xi_{n+1}$.

Запишем решение уравнения (3):

$$f_\xi = \rho \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\varphi_k(\eta)\exp(-\mu_k t),\ \rho = C\exp(-U/D), \tag{5}$$

где φ_k и μ_k – собственные функции и невырожденные собственные значения следующей краевой задачи:

$$D\frac{d}{d\eta}\left(\rho\frac{d\varphi_k}{d\eta}\right) = -\mu_k\rho\varphi_k. \tag{6}$$

Отметим, что $\varphi_0 \equiv 1$, $\mu_0 = 0$, $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$.

Рассмотрим случай относительно малых интенсивностей шума ($D \ll U_0$, $U_0 = a^2/4b$ – высота барьера в бистабильном потенциале при $F = 0$). Здесь существует весьма длительная стадия релаксации, для которой в (5) можно ограничиться двумя первыми членами ряда. Длительность метастабильной стадии определяется неравенством $\mu_2^{-1} \ll t \ll \mu_1^{-1}$. Используя результаты работы [5] для относительно небольших внешних полей, имеем

$$\varphi_1(\eta) = -\frac{F\eta_0}{D} + erf\left[\sqrt{\frac{a}{2D}}\left(\eta + \frac{F}{a}\right)\right],$$

$$\mu_1 = \frac{a\sqrt{2}}{\pi}\exp\left(-\frac{U_0}{D}\right)\,\mathrm{ch}\left(\frac{F\eta_0}{D}\right),\ \mu_2 \approx a,$$

где $erf(z)$ – интеграл ошибок, $\eta_0\sqrt{a/b}$.

Отсюда

$$\langle\eta\rangle_P = \int_{-\infty}^{\infty} \eta\rho[1 + \varphi_1(\xi)\varphi_1(\eta)]d\eta = \frac{F}{2a} + \eta_0 erf\left[\sqrt{\frac{a}{2D}}\left(\xi + \frac{F}{a}\right)\right]. \tag{7}$$

Решение (7) есть функция распределения при $g = 0$ и $F \neq 0$. Для того, чтобы найти главный и линейный по g и F вклад в функцию распределения, найдем решение (4) при $g \neq 0$ и $F = 0$. Представим решение (4) в виде

$$\Psi = \rho\sum_{m=0}^{\infty} C_m(t)\varphi_m(\eta).$$

Коэффициенты разложения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dC_m}{dt} + \mu_m C_m = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_s M_s B_{mk}\exp[-(\mu_s + \mu_k)t],\ C_m|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

$$A_s = \varphi_s(\xi') + \varphi_s(\xi''),\ M_s = \int_{-\infty}^{\infty} \eta\rho\varphi_s d\eta,\ B_{mk} = \varphi_k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \rho\varphi_k\varphi'_m d\eta.$$

Несложно получить точное решение (8) и определить C_m на метастабильной стадии релаксации. При этом принимается во внимание симметричность потенциала и то, что $\varphi_{2s}(-\eta) = \varphi_{2s}(\eta)$, $\varphi_{2s+1}(-\eta) = -\varphi_{2s+1}(\eta)$. В результате получаем

$$\langle\eta\rangle_Q = A_1 M_1 (M_1 B_{10} t + S_1) + M_1 (B_{10} S_2 + S_3), \tag{9}$$

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1,0} M_{2m+1}}{\mu_{2m+1}},\ S_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{2s+1} M_{2s+1}}{\mu_{2s+1}},\ S_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_{1,2k} A_{2s+1} M_{2s+1}}{\mu_{2k} + \mu_{2s+1}}.$$

В основе расчета сумм и коэффициентов в (9) используется уравнение (6) для базисных функций φ_k и их свойства полноты и ортогональности

$$\rho \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)\varphi_n(\eta) = \delta(\eta - \xi),\ \int \rho\varphi_k\varphi_n d\eta = \delta_{kn}.$$

Возникающие при этом интегралы вычисляются по методу перевала.

Обратим внимание на экспоненциальную малость коэффициента B_{10}:

$$B_{m0} = \frac{\mu_m}{D} \int_{-\infty}^{\infty} \eta\rho\varphi_m d\eta = \frac{\mu_m}{D} M_m,\ B_{10} = \frac{\mu_1}{D}\eta_0,\ M_1 = \eta_0.$$

Во-первых, это позволяет пренебречь в (9) членом, линейно растущим во времени. Он играет определяющую роль на временах $t \geq \mu_1^{-1} D/U_0$. Во-вторых, как показывают оценки, можно пренебречь также членом, содержащим сумму S_2.

Расчет суммы S_1 тривиален:

$$S_1 = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} M_{2m+1}^2 = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \rho d\eta - \frac{1}{D} M_1^2 = \frac{1}{2a}.$$

Для оценки суммы S_3 примем во внимание то, что $\sum\limits_{s=0}^{\infty} A_{2s+1} M_{2s+1} = \xi' + \xi'' \ll A_1 M_1$. Это означает, что члены данного ряда являются знакопеременными. Отсюда находим приближенное значение для S_3:

$$S_3 \simeq A_1 M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{1,2k}}{\mu_{2k}} = \frac{2}{D} A_1 M_1 \int_0^{\infty} \rho dy \int_{\xi}^{y} \rho^{-1} j(x) dx \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{D} A_1 M_1 \int\limits_{\xi}^{\eta_0} \rho^{-1} j(x) dx \simeq A_1 M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a D}} \exp\left(-\frac{a\xi^2}{2D}\right),$$

где $j(x) = \int\limits_0^x \rho\varphi_1' d\eta - B_{10} \int\limits_0^x \rho d\eta$.

С учетом полученных значений S_i и малого в (7) поля F имеем

$$\langle\eta_n\rangle = \frac{1}{2a}(F + h_n) + \eta_0 \sqrt{\frac{2}{\pi a D}} \exp\left(-\frac{a\xi_n^2}{2D}\right)(F + h_n), \tag{10}$$

где $h_n = g\eta_0 \left[erf\left(\sqrt{\frac{a}{2d}}\xi_{n-1}\right) + erf\left(\sqrt{\frac{a}{2D}}\xi_{n+1}\right)\right]$ – поле взаимодействия.

По отношению к отдельному элементу цепочки поле h_n ведет себя подобно внешнему полю F. В случае немалых значений g и F формула для $\langle\eta_n\rangle$ должна совпадать с (10) в первом порядке разложения по степеням g и F и совпадать с (7) при $g = 0$. Поэтому

$$\langle\eta_n\rangle \simeq \frac{1}{2a}(F + h_n) + \eta_0 erf\left[\sqrt{\frac{a}{2D}}\left(\xi_n + \frac{F + h_n}{a}\right)\right].$$

Отсюда восприимчивость бистабильного элемента n имеет вид

$$\chi_n \simeq \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2}{\pi b D}} \exp\left[-\frac{a}{2D}\left(\xi_n + \frac{h_n}{a}\right)^2\right].$$

Видно, что при $\xi_n + h_n/a \neq 0$ восприимчивость с ростом интенсивности шума возрастает, достигает своего максимального значения и затем спадает по степенному закону. Подобное поведение восприимчивости бистабильной системы наблюдается при стохастическом резонансе. Взаимодействие бистабильных элементов искажает начальные условия, поэтому образуются отдельные группы элементов, для которых восприимчивость выше, чем у изолированной бистабильной системы. Таким образом, в рассматриваемом одноразмерном ансамбле также будет наблюдаться эффект стохастического резонанса. Причем взаимодействие может привести к его усилению.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 96–02–18692.

ЛИТЕРАТУРА

[1] McNamara B., Wiesenfeld K., and Roy R. Phys. Rev. Lett., **60**, no. 25, 2626 (1988).

[2] Дыкман М. И. и др. Письма в ЖЭТФ, **53**, N 4, 182 (1991).

[3] Hu G., Haken H., and Ning C. Z. Phys. Lett. A, **172**, no. 1-2, 21 (1992).

[4] Inchiosa M. E. and Bulsara A. R. Phys. Lett. A, **200**, 3-4, 283 (1995).
[5] Решетняк С. А., Харчев С. М., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **173**, 94 (1985).

Поступила в редакцию 14 ноября 1997 г.