УДК 538.945

О ФУНКЦИИ ГРИНА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В. П. Силин, А. В. Студенов

Рассмотрены свойства функции Грина линеаризованного основного уравнения одномерной нелокальной джозефсоновской электродинамики. Основное внимание уделено случаю движений источника со скоростью, меньшей свихартовской. Выявлены эффекты черенковского излучения медленных волн, экранировки источника поля вдоль туннельного перехода и вклада ветвления, обусловленного экранировкой магнитного поля, проникающего в сверхпроводник.

В работе [1] рассмотрена возможность описания нелинейных электромагнитных свойств джозефсоновских переходов в массивных сверхпроводниках в таких условиях, когда характерный пространственный масштаб изменения разности фаз φ куперовских пар по разные стороны перехода может быть сравним с лондоновской глубиной λ проникновения магнитного поля, а то и меньше ее. Для такой ситуации в работе [1] было предложено нелокальное интегродифференциальное описание, в основу которого кладется уравнение:

$$\frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\beta}{\omega_j^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sin\varphi-$$

$$-\frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz'\varphi(z',t)K_0\left(\frac{|z-z'|}{\lambda}\right)=0. \quad (1)$$

Здесь ω_j и λ_j – джозефсоновские частота и длина, β характеризует проводимость перехода, $K_0(x)$ – функция Макдональда.

В работе [2] привлечено внимание к своеобразной возможности черенковского излучения медленно движущимся источником обобщенных волн Свихарта, спектр которых был установлен в работе [1]. В этой связи возникает необходимость построения и изучения функции Грина линеаризованного уравнения (1)

$$\frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\frac{\beta}{\omega_j^2}\frac{\partial g}{\partial t}+g-$$

$$-\frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz' g(z',t)K_0\left(\frac{|z-z'|}{\lambda}\right)=\delta(z-vt). \tag{2}$$

Такая функция Грина обычно используется в теории возбуждения волн, а также и неволновых возмущений источником, который движется с постоянной скоростью v.

В настоящем сообщении рассматривается такая функция Грина. Ее свойства из-за нелокальности (интегральности) уравнения (2) качественно отличаются от свойств функции Грина локальной электродинамики джозефсоновских переходов.

Уравнение (2) нетрудно решить с помощью преобразования Фурье, что позволяет записать функцию Грина в следующей интегральной форме:

$$g(z,t)=\omega_j^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{\exp[ik(z-vt)]}{\omega^2(k)-k^2v^2-i\beta kv}. \tag{3}$$

Здесь $\omega(k)$ – частота обобщенных волн Свихарта, спектр которых согласно [1] определяется соотношением

$$\omega^2(k)=\omega_j^2+k^2v^2/(1+k^2\lambda^2)^{1/2}; \tag{4}$$

где $v_s=\omega_j\lambda_j$ – скорость Свихарта. Естественно, что в пределе $k\lambda\ll 1$ из формулы (4) следует обычный спектр волн Свихарта

$$\omega^2(k)=\omega_j^2+k^2v_s^2. \tag{5}$$

Напротив, в пределе на малых $k\lambda$ спектр (4) существенно отличается от спектра (5). Именно в таком случае согласно [2] становится возможно черенковское возбуждение обобщенных волн Свихарта медленно движущимся источником возмущений. Действительно, именно в этом случае возникает качественное отличие от локальной электродинамики, дающей спектр (5). Чтобы это показать, обратимся к условию черенковского излучения

$$k^2v^2=\omega^2(k). \tag{6}$$

В пределе длин волн бо́льших лондоновской длины, когда $k\lambda \ll 1$ и когда имеет место обычный локальный спектр (5), формула (6) дает

$$k^2 = \omega_j^2/(v^2 - v_s^2). \tag{7}$$

Выражение (7) только при $v^2 > v_s^2$ оказывается положительным, то есть отвечает возможности распространения волн. Напротив, для источника, движущегося со скоростью, меньшей скорости Свихарта, когда

$$v^2 < v_s^2, \tag{8}$$

выражение (6) отрицательно. Это означает, что обычные, в нашей терминологии длинноволновые ($k\lambda \ll 1$) волны Свихарта медленным источником не могут возбуждаться. Для обобщенных волн Свихарта со спектром (4) положение существенно изменяется. Это особенно ясно видно в пределе коротких волн, когда $k\lambda \gg 1$ и когда уравнение (6) принимает вид

$$k^2 v^2 = \omega_j^2 + v_s^2 |k|/\lambda. \tag{9}$$

Отсюда получается выражение

$$k = \pm \frac{v_s^2}{2v^2\lambda}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4v^2\lambda^2}{v_s^2\lambda_j^2}}\right] \tag{10}$$

для волнового вектора обобщенной волны Свихарта, которая может возбуждаться черенковским способом. При этом длина волны будет много меньше лондоновской длины, если $v \ll v_s$. Таким образом, мы видим качественное различие нелокальной электродинамики от обычной локальной. Оно обусловлено тем фактом, что согласно спектру обобщенных волн Свихарта (4) для коротких волн с уменьшением длины волны уменьшается фазовая скорость волн.

При явном вычислении интеграла (3), которое мы будем проводить в пределе $\beta = +0$, удобно воспользоваться процедурой смещения контура интегрирования в комплексную плоскость переменного k. Здесь сразу обнаруживается еще одно качественное своеобразие нелокальной джозефсоновской электродинамики, которое заключается в том, что спектр (4) в отличие обычного спектра (5) обладает точками ветвления $k = \pm i\lambda$. Обсудим прежде всего именно этот новый вклад в функцию Грина. Такой вклад можно выделить с помощью смещения контура интегрирования в правой части формулы (3) в верхнюю или в нижнюю полуплоскость k в зависимости от знака $z - vt$ с последующим интегрированием по берегам разреза. При этом необходимо проследить за аккуратным аналитическим продолжением функции

$$(1 + k^2\lambda^2)^{-1/2} \tag{11}$$

в комплексную плоскость k. Это достигается требованием положительности (11) на действительной оси комплексной плоскости. В результате вклад ветвления в функцию Грина можно представить в виде:

$$g_b(z - vt) = \frac{\lambda}{\pi\lambda_j^2}\int\limits_1^\infty \frac{drr^2\sqrt{r^2-1}\exp[-r|z-vt|/\lambda]}{(r^2-1)[(\lambda/\lambda_j)^2 + r^2(v/v_s)^2]^2 + r^4}. \tag{12}$$

В случае медленного движения, когда

$$v \ll v_s, \tag{13}$$

формула (12) позволяет записать простые асимптотические выражения. Так, если

$$|z - vt| \gg \lambda \text{ и } \lambda_j \gg \lambda, \tag{14}$$

то (12) дает:

$$g_b(z - vt) = \frac{\lambda^{5/2}}{\sqrt{2\pi}\lambda_j^2|z-vt|^{3/2}}\exp\left(-\frac{|z-vt|}{\lambda}\right). \tag{15}$$

Это же выражение имеет место и тогда, когда $\lambda \gg \lambda_j$ и одновременно выполнено соотношение $\lambda^5 \ll \lambda_j^4|z - vt|$. Если же

$$\lambda \gg \lambda_j;\ |z - vt| \gg \lambda \text{ и } \lambda^3 \gg \lambda_j^4|z - vt|, \tag{16}$$

то имеем

$$g_b(z - vt) = \frac{\lambda_j^2}{\sqrt{2\pi}\lambda^{5/2}|z-vt|^{1/2}}\exp\left(-\frac{|z-vt|}{\lambda}\right). \tag{17}$$

Наличие предэкспоненциального степенного множителя в формулах (15) и (17), зависящего от $|z - vt|$, является специфической особенностью вклада ветвления Фурье-образа функции Грина в ее зависимость от координаты и времени.

Перейдем теперь к обсуждению вкладов в интеграл (3), возникающих от полюсов Фурье-образа функции Грина. Прежде всего укажем, что согласно уравнению (7) имеются два чисто мнимых корня ik_1 и $-ik_1 (k_1 > 0)$. При малых k_1, когда $k_1\lambda \ll 1$, эти корни определяются формулой (6). Нетрудно видеть, что $k_1\lambda < 1$. Очевидно, что чисто мнимые корни уравнения (6) приводят к экспоненциально убывающей зависимости функции Грина от ее аргумента, то есть к экранировке:

$$g_e(z - vt) = \frac{(1 - k_1^2\lambda^2)^{1/3}\exp[-k_1|z - vt|]}{\lambda_j^2 k_1[2 - k_1^2\lambda_1^2 - 2(v/v_s)^2(1 - k_1^2\lambda^2)^{3/2}]}. \tag{18}$$

Так же как и вклад ветвления (12), формула (18) отвечает зависимости функции Грина от модуля $|z - vt|$. В пределе медленного движения (13) из формулы (18) вытекают следующие простые выражения

$$g_e(z - vt) = \frac{1}{2\lambda_j}\exp\left[-\frac{|z - vt|}{\lambda_j}\right], \ \lambda \ll \lambda_j, \tag{19}$$

$$g_e(z - vt) = \frac{\lambda_j^4}{\lambda^5}\exp\left[-\frac{|z - vt|}{\lambda}\right], \ \lambda \gg \lambda_j. \tag{20}$$

Формула (19) отвечает пределу обычной локальной электродинамики джозефсоновских переходов, когда экранирование происходит на джозефсоновской длине. Напротив, формула (20) отвечает пределу ярко выраженной нелокальности, соответствующей большим значениям плотности критического тока Джозефсона [3, 4], когда экранировка возникает на лондоновской глубине проникновения магнитного поля.

Нам остается рассмотреть вклад еще двух действительных корней уравнения (6): k_2 и $-k_1$. При конечном малом значении β все они имеют малую отрицательную мнимую часть. Поэтому от них возникает ненулевой вклад в функцию Грина только при $z < vt$, что, как и обычно, отвечает черенковскому излучению волн с волновым вектором k_2. Для соответствующего черенковского вклада в функцию Грина получаем

$$g_{ch}(z - vt) = \frac{2(1 + k_2^2\lambda^2)^{3/2}\theta(vt - z)\sin(k_2(vt - z))}{\lambda_j^2 k_2[2(v^2/v_s^2)(1 + k_2^2\lambda^2)^{3/2} - 2 - k_2^2\lambda^2]}, \tag{21}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда: $\theta(x) = 1$, $x > 0$; $\theta(x) = 0$, $x < 0$.

Для медленного движения (13), когда корень k_2 определяется формулой (10), черенковский вклад в функцию Грина (21) имеет следующий вид:

$$g_{ch}(z - vt) = \frac{2\lambda\theta(vt - z)\sin[k_2(vt - z)]}{\lambda_j^2\sqrt{1 + (2v\lambda/v_s\lambda_j)^2}}. \tag{22}$$

В частности, если

$$\lambda v \ll \lambda_j v_s \tag{23}$$

и выполнено условие (13), то формула (21) отвечает возбуждению волны с частотой $(v_s^2/v\lambda)$ и принимает вид:

$$g_{ch}(z - vt) = \frac{2\lambda}{\lambda_j^2}\theta(vt - z)\sin\left[\frac{v_s^2}{v^2}\frac{vt - z}{\lambda}\right]. \tag{24}$$

Если же

$$\lambda v \gg \lambda_j v_s, \tag{25}$$

то

$$g_{ch}(z - vt) = \frac{\omega_j}{v}\theta(vt - z)\sin\left[\omega_j\left(t - \frac{z}{v}\right)\right], \tag{26}$$

что отвечает возбуждению обобщенной волны Свихарта с длиной $v/\omega_j \ll \lambda$ и с частотой Джозефсона ω_j. Заметим, что случай (23) может реализоваться как в обычно рассматривающемся пределе сравнительно малых значений плотности критического тока Джозефсона, когда $\lambda \ll \lambda_j$, так и в противоположном пределе реализации вихрей Абрикосова – Джозефсона, когда джозефсоновский переход можно назвать сильноточным. Напротив, в отличие от случая (23) условие (25) для медленных движений (13) может реализоваться только тогда, когда джозефсоновский переход является сильноточным, то есть лондоновская глубина проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник существенно превышает джозефсоновскую длину. Подчеркнем, что в этом случае согласно (24) и (23) генерируемая частота обобщенной волны Свихарта $\omega_j(\lambda_j v_s/\lambda v)$ оказывается значительно превосходящей частоту Джозефсона.

Подводя итог, можно утверждать, что функция Грина уравнения (2) складывается из трех слагаемых различной природы. При этом анализ свойств функции Грина для медленных движений (13) показывает, что вклад ветвления существенно убывает на расстояниях порядка лондоновской длины независимо от того, является ли джозефсоновский переход сильноточным или слаботочным. Совершенно иначе ведет себя экранировочный вклад в функцию Грина. Именно в случае малой плотности критического тока экранировка имеет место на джозефсоновской длине. Напротив, при большой плотности критического тока экранировка реализуется на лондоновской длине. Общим здесь является то, что экранировка происходит на большем из двух расстояний – лондоновской или джозефсоновской длине. Наконец, следствия, касающиеся черенковского вклада в функцию Грина, демонстрируют интересную картину возбуждения обобщенных волн Свихарта. При этом свойства медленно движущегося источника возбуждения оказываются особено интересными в случае джозефсоновских переходов с большой критической плотностью тока, когда $\lambda > \lambda_j$, а туннельный переход уже нельзя трактовать как слабую связь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алиев Ю. М., Силин В. П., Урюпин С. А. Сверхпроводимость: физика, химия, техника, **5**, 228 (1992), Superconductivity, **5**, 230 (1992).

[2] Mints R. G., Snapiro I. B. Phys. Rev., **B 52**, 9691 (1995).

[3] Gurevich A. Phys. Rev., **B 46**, 3187 (1992).

[4] Алфимов Г. Л., Силин В. П. ЖЭТФ, **106**, 671 (1994), JETP, **79**, 369 (1994).

Поступила в редакцию 14 декабря 1995 г.