

УДК 533.951

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ НИЗКОЧАСТОТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Меонг-Хи Ри¹, А. А. Рухадзе

Исследуется нелинейная динамика низкочастотной неустойчивости слабоионизованной плазмы во внешнем электрическом поле, реализующейся при учете только упругих столкновений заряженных частиц с нейтральными, более того, в предположении независимости частот столкновений от энергии частиц. Получено нелинейное уравнение, описывающее динамику плотности плазмы и имеющее вид уравнения диффузии с отрицательным нелинейным коэффициентом диффузии. Последнее обстоятельство указывает на взрывной характер развития неустойчивости. Определены время взрыва и пространственное распределение плотности плазмы.

В работе [1] была предсказана низкочастотная неустойчивость слабоионизованной плазмы во внешнем электрическом поле при учете только упругих столкновений заряженных частиц с нейтральными. При этом рассмотрены одномерные возмущения (вдоль поля) в области частот, меньших обратного времени релаксации температуры электронов. Ионы при этом считались холодными. Эта неустойчивость впоследствии была подтверждена экспериментально и получила название термотоковой. Надо отметить, однако, что одномерное приближение, использованное в [1] и в последующих работах, не позволяет адекватно понять природу неустойчивости. В недавней работе [2] эта неустойчивость была рассмотрена в трехмерном приближении, причем на частоту колебаний накладывалось лишь ограничение их малости по сравнению с самими частотами

¹МГУ, физический факультет.

столкновений. Трехмерное приближение позволило показать, что неустойчивость имеет место при выполнении сильного условия черенковского излучения $\omega \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0$, где \mathbf{u}_0 – токовая скорость дрейфующих электронов, ω и \mathbf{k} – частота и волновой вектор возмущений. В этом смысле она подобна нерезонансной неустойчивости Бунемана, имеющей место при $\omega \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 < \omega_{Le}$, где ω_{Le} – ленгмюровская частота электронов (см., например, [3]). В рассматриваемом случае требуется выполнение неравенства $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 < \delta_m \nu_{e0}$, где $\delta_m \sim m/M$, а ν_{e0} – частота упругих столкновений электронов. Это позволяет рассматривать низкочастотную неустойчивость как вынужденное излучение дрейфующими электронами релаксационных колебаний температуры электронов, аperiodически затухающих в отсутствие тока в плазме с характерным временем $\sim 1/(\delta_m \nu_{e0})$.

В работе [2] было показано, что в области $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 > \delta_m \nu_{e0}$ неустойчивость стабилизируется, что позволило заключить, что в результате развития неустойчивости должна возникнуть продольная модуляция плотности плазмы с характерным пространственным периодом l_m , где $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{u}_0 \sim \pi \mathbf{u}_0 / l_m \approx \delta_m \nu_{e0}$. Ниже на основе нелинейного анализа динамики неустойчивости это утверждение обосновывается и дается оценка времени установления такой модуляции.

Прежде чем перейти к нелинейной динамике, напомним основные моменты линейной теории неустойчивости. Это тем более необходимо, что в [1] анализ слишком усложнен учетом энергетических зависимостей частот столкновений, а в [2] – рассмотрением более широкой области частот, чем необходимо. Кроме того, здесь мы обратим внимание на еще одну аналогию этой неустойчивости с бунемановской, что облегчит анализ нелинейной динамики.

Подобно нерезонансной бунемановской неустойчивости, низкочастотную неустойчивость токовой плазмы можно описать дисперсионным уравнением [3]

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \delta\epsilon^e(0, \mathbf{k}) + i \frac{\omega_{Li}^2}{\omega \nu_{i0}} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\delta\epsilon^e(0, \mathbf{k})$ – статический электронный вклад в диэлектрическую проницаемость плазмы $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$, а $\delta\epsilon^i(\omega, \mathbf{k}) = +i \frac{\omega_{Li}^2}{\omega \nu_{i0}}$ – ионный вклад. Легко видеть, что если $1 + \text{Re} \delta\epsilon^e(0, \mathbf{k}) < 0$, то колебания неустойчивы, причем неустойчивость обусловлена притяжением между собой ионов, погруженных в статистический фон электронов. Именно это имеет место в случае бунемановской неустойчивости, когда

$$1 + \delta\epsilon^e(0, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2} < 0. \quad (2)$$

В случае низкочастотной неустойчивости в области $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 \ll \delta_m \nu_{e0}$ из формул, полученных в [2], имеем

$$1 + \delta\epsilon^e(0, \mathbf{k}) = 1 - i \frac{\omega_{Le}^2}{\nu_{e0}} \frac{\delta_m \nu_{e0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 (\delta_m \nu_{e0} + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) - i \frac{k_{\perp}^2 T_0}{m \nu_{e0}} \delta_m \nu_{e0}}, \quad (3)$$

где $T_0 = m u_0^2 / (2 \delta_m)$ – температура электронов (ионы, так же как нейтралы, считаются холодными). Легко видеть, что и здесь $1 + \text{Re} \delta\epsilon^e(0, \mathbf{k}) < 0$. Подставляя (3) в (1), для плотной плазмы ($\omega_{Le}^2 \gg (\delta_m \nu_{e0})^2$) получаем [2]

$$\omega = \frac{m \nu_{e0}}{M \nu_{i0}} \left\{ \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 + i \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - k_{\perp}^2 u_0^2}{2 \delta_m \nu_{e0}} \right\}. \quad (4)$$

При $k_{\perp} = 0$ (одномерное приближение) величина (4) совпадает с полученной в [1]. В [2] показано, что развитие неустойчивости возможно только при $k_{\parallel}^2 > k_{\perp}^2$, что оправдывает применение одномерного приближения.

Теперь перейдем к анализу нелинейной динамики развития неустойчивости, ограничиваясь одномерным случаем и статическим пределом для электронов, считая, кроме того, $\delta_m \nu_{e0} \gg u_0 / l_m$. В этих ограничениях из полной системы нелинейных гидродинамических уравнений, приведенных в [2], остаются

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[n_e \left(u_0 + \frac{eE}{m \nu_{e0}} - \frac{1}{m \nu_{e0} n_e} \frac{\partial(n_e T_e)}{\partial x} \right) \right] &= 0, \\ T_e = T_n + \frac{m}{2 \delta_m} \left(u_0 + \frac{eE}{m \nu_{e0}} - \frac{1}{m \nu_{e0} n_e} \frac{\partial(n_e T_e)}{\partial x} \right)^2, & \quad (5) \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{eE}{M \nu_{i0}} n_i &= 0, \quad u_0 = \frac{eE_0}{m \nu_{e0}}. \end{aligned}$$

Здесь E_0 – заданное внешнее электрическое поле, а E – внутреннее. Из системы (5) для плотной плазмы с $n_e = n_i = n$ получаем нелинейное уравнение для n

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{m \nu_{e0}}{M \nu_{i0}} u_0 \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{n_0^2 T_0}{M \nu_{i0}} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

где n_0 – равновесная плотность плазмы. В линейном приближении $n = n_0 + \delta n$ из (6) следует уравнение диффузии

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{m \nu_{e0}}{M \nu_{i0}} u_0 \frac{\partial \delta n}{\partial x} + \frac{T_0}{M \nu_{i0}} \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

с отрицательным коэффициентом диффузии, что и приводит к неустойчивости с частотой (4) (при $k_{\perp} = 0$).

Вернемся к нелинейному уравнению (6). Второе слагаемое в этом уравнении легко исключается переходом в движущуюся со скоростью $\frac{m}{M} \frac{\nu_{e0}}{\nu_{i0}} \mathbf{u}_0$ систему координат. В оставшемся уравнении введем безразмерные время $t \rightarrow \sim t \frac{T_0}{M \nu_{i0} l_m^2} \sim t \delta_m \nu_{e0} \frac{m}{M} \frac{\nu_{e0}}{\nu_{i0}}$ и координату $x \rightarrow x/l_m$, где $u_0/l_m \sim \delta_m \nu_{e0}$, что соответствует введению максимального инкремента нарастания малых возмущений при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 \sim \delta_m \nu_{e0}$. В результате получили полностью безразмерное нелинейное уравнение для величины $U = n_0/n$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение также диффузионного типа с отрицательным нелинейным коэффициентом диффузии, пропорциональным U^2 . В линейном приближении величина $U^2 \rightarrow 1$ и падает с ростом плотности плазмы по сравнению с однородной плотностью n_0 . Отсюда следует при небольшом возмущении плотности плазмы

$$U \sim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{+x^2/4t}, \quad (9)$$

что соответствует уменьшению плотности плазмы (увеличению U) с ростом x и ее увеличению с ростом t . Заметим, однако, что решение (9) справедливо только асимптотически при $t > 1$.

Для малых $t < 1$ и больших возмущений (U^2 сильно отличается от единицы) представим $U(x, t)$ как

$$U(x, t) = \frac{f(x)}{\sqrt{t_0 - t}}. \quad (10)$$

В результате из (8) получим уравнение

$$\frac{1}{2} + f f''(x) = 0, \quad (11)$$

решение которого записывается в неявном виде

$$\int^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{-\ln y + C_1}} = x + C_2, \quad (12)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Легко видеть, что $t_0 > 0$, т.к. только в этом случае решение (10) соответствует росту плотности плазмы с ростом t и ее уменьшению с ростом x (с учетом (12)), оно

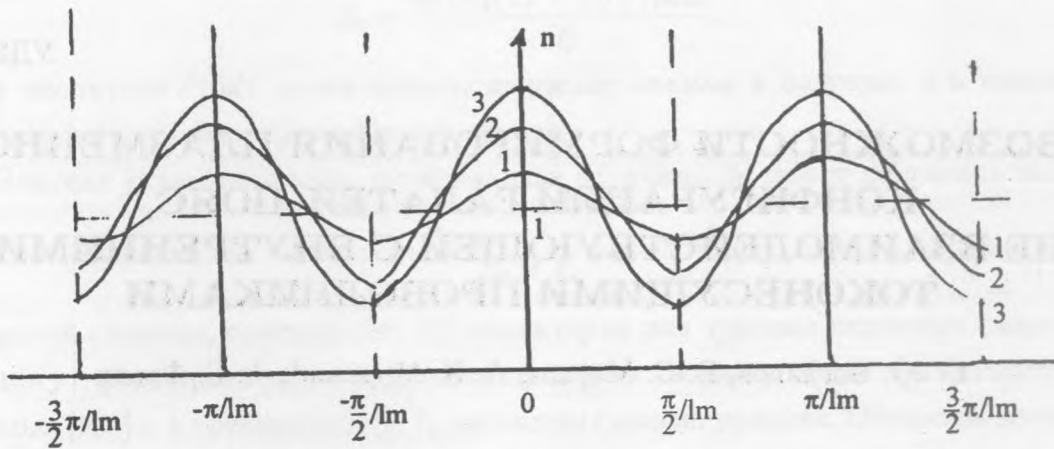


Рис. 1. Пространственная картина плотности плазмы n при развитии неустойчивости. Кривые (1) – (3) соответствуют увеличению t .

несколько слабее, чем $1/x$), что согласуется с (9). Более того, из (12) следует, что при некотором значении t величина $U \rightarrow \infty$; а следовательно $n \rightarrow 0$. Иными словами, происходит взрывной рост U . Поскольку уравнение (8) не содержит никаких размерных параметров, то естественно полагать, что такой взрыв происходит при безразмерном $t_0 \rightarrow 1$, или размерном времени $t \rightarrow \frac{1}{\delta_m \nu_{e0}} \frac{M \nu_{i0}}{m \nu_{e0}}$, соответствующем обратной величине максимального значения инкремента развития неустойчивости.

Ниже на рис. 1 представлена качественная пространственная картина плотности плазмы n при развитии неустойчивости, причем кривые 1-3 соответствуют величине t .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимофеев А. В. ЖТФ, **40**, 192 (1970).
- [2] Кудреватова О. В., Меонг-Хи Ри, Рухадзе А. А. Известия РАН (в печати), Тезисы докладов IX конференции по физике газового разряда.
- [3] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы., М., Высшая школа, 1978 (I изд), 1988 (II изд).

Поступила в редакцию 11 января 2000 г.