УДК 535.2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОНОВ ДЛЯ СМЕШАННОГО МНОГОМОДОВОГО СВЕТА

В. В. Додонов, В. И. Манько, О. В. Манько

Функция распределения фотонов для смешанного состояния N-модового света, описываемого функцией Вигнера общего гауссового типа, выражена в явном виде через полиномы Эрмита от 2N переменных с равными парами индексов. Приведены новые производящие функции для "диагональных" полиномов Эрмита и для функций распределения фотонов. Получены формулы для среднего значения и среднеквадратичного отклонения числа фотонов. N-модовая функция распределения фотонов для сжатых фоковских состояний и для сжатого когерентного состояния выражена через полиномы Эрмита от 2N и N переменных, соответственно. Выведены новые соотношения между полиномами Эрмита от 2N и N переменных.

Функции распределения фотонов в неклассических состояниях света, описываемых гауссовыми функциями Вигнера, обладают интересными свойствами, связанными с эффектом сжатия в некоторых квадратурных компонентах [1, 2]. Прежде основное внимание при изучении статистики фотонов было сосредоточено на одномодовом и двухмодовом случаях. В частности, функция распределения фотонов (ФРФ) для одномодовых гауссовых состояний электромагнитного поля обсуждалась в статьях [3 – 11]. Наиболее простые выражения в терминах полиномов Эрмита от двух переменных с равными индексами были недавно получены в [12], где изучался наиболее общий случай смешанного состояния одномодового света, описываемого функцией Вигнера гауссового типа. Статистика фотонов в частных случаях гауссовых чистых состояний двухмодового света изучалась также в [13, 14].

До сих пор аналитические выражения для функции распределения фотонов были получены только для указанных частных случаев гауссовых состояний, т.е. для одномодового и двухмодового света. С другой стороны, статистика фотонов в многомодовом свете имеет специфические свойства, связанные с различными величинами сжатия в различных модах и с возможными сильными корреляциями между модами, возникающими благодаря их взаимодействию с тепловым шумом. Для наиболее общего N-модового смешанного гауссова состояния света вся информация о многомодовом сжатии, межмодовых корреляциях и влиянии теплового шума задается $2N^2 + 3N$ действительными параметрами. Физический смысл этих параметров становится наиболее ясным в представлении Вигнера. Они являются не чем иным, как средними квадратурами и матричными элементами действительной симметричной матрицы дисперсий, которые полностью определяют гауссову функцию Вигнера общего типа. Цель нашего исследования состоит в изучении зависимости функции распределения фотонов многомодового смешанного гауссова света от этих физических параметров.

Более точно, цель данной статьи состоит в обобщении результатов работы [12], посвященной функции распределения фотонов в одномодовом смешанном гауссовом свете на многомодовый случай. Мы покажем, что ФРФ в N-модовом состоянии поля, описываемом гауссовой функцией Вигнера общего вида, может быть выражена в терминах полиномов Эрмита от $2N$ переменных с равными парами индексов.

Кроме того, мы обсудим два важных специальных случая чистых гауссовских состояний, а именно, сжатые когерентные состояния и сжатые фоковские состояния.

Необходимо заметить, что функция распределения фотонов и недиагональные элементы матрицы плотности для некоторых многомодовых гауссовых состояний были выражены через многомерные полиномы Эрмита еще в [15]. Однако результаты этой работы были представлены через коэффициенты некоторого неоднородного симплектического канонического преобразования операторов квадратур фотонов, которые связаны с физическими параметрами, определяемыми гауссовой функцией Вигнера, через сложную функциональную зависимость.

Наконец, поскольку многомерные полиномы Эрмита естественным образом появляются в различных проблемах, связанных с квантовыми системами, описываемыми многомерными квадратичными гамильтонианами (см., например, [16 – 18]), мы выведем некоторые новые явные выражения для этих полиномов (включая производящие функции и правила сумм), которые могут быть удобны для приложений.

1. Функция распределения фотонов для гауссова квантового состояния общего вида

Наиболее общее N-модовое смешанное сжатое состояние с гауссовым оператором плотности ϱ описывается гауссовой функцией Вигнера $W(\mathbf{p},\mathbf{q})$ общего вида (см., например, [17])

$$W(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\det\mathbf{M})^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Q}- <\mathbf{Q}>)\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q}- <\mathbf{Q}>)\right], \tag{1}$$

где $2N$-мерный вектор $\mathbf{Q} = (\mathbf{p},\mathbf{q})$ состоит из N компонент $p_1,...,p_N$ и N компонент $q_1,...,q_N$, а операторы $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$ являются квадратурными компонентами операторов рождения $\hat{\mathbf{a}}\dagger$ и уничтожения $\hat{\mathbf{a}}$ фотонов (мы используем безразмерные переменные, положив $\hbar = 1$):

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}\dagger}{i\sqrt{2}},\ \hat{\mathbf{q}} = \frac{\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}\dagger}{i\sqrt{2}}.$$

$2N$ параметров $< p_i >$ и $< q_i >$, $i = 1,2,...,N$, объединенных в вектор $<\mathbf{Q}>$, являются средними значениями квадратур,

$$<\mathbf{p}> = \mathrm{Tr}\hat{\varrho}\hat{\mathbf{p}},\ <\mathbf{q}> = \mathrm{Tr}\hat{\varrho}\hat{\mathbf{q}}.$$

Действительная симметричная матрица дисперсий $\mathbf{M}$ состоит из $2N^2 + N$ дисперсий

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} < \hat{Q}_\alpha\hat{Q}_\beta + \hat{Q}_\beta\hat{Q}_\alpha > - < \hat{Q}_\alpha >< \hat{Q}_\beta >,\ \alpha,\beta = 1,2,...,2N.$$

На них наложены определенные ограничения, являющиеся не чем иным, как обобщенными соотношениями неопределенностей. Простейшее из этих ограничений приведено в разделе 4.

Конечно, можно выбирать различные представления статистического оператора, например, координатное представление или различные модификации представления когерентных состояний (такие как "нормальные", "антинормальные", "позитивные", т.д.). Тем не менее, функция Вигнера (1) является наиболее подходящей, так как для гауссовских состояний она действительна и положительна. Более того, все коэффициенты квадратичной формы в экспоненте действительны и имеют ясный физический смысл (см. также [19]).

Функция распределения фотонов есть не что иное как вероятность иметь n_1 фотонов в первой моде, n_2 фотонов во второй моде, и так далее. Мы обозначим ее символом $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$,

где вектор $\mathbf{n}$ состоит из N неотрицательных целых чисел: $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_N)$. Эта вероятность задается формулой

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}} =< \mathbf{n} \mid \hat{\varrho} \mid \mathbf{n} >,$$

где $\hat{\varrho}$ – оператор плотности изучаемой системы, а $\mid \mathbf{n} >$ – общее собственное состояние для набора операторов числа фотонов $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i,\ i = 1, 2, ..., N$:

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \mid \mathbf{n} >= n_i \mid \mathbf{n} > .$$

Простейший способ получить $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$ – это вычислить производящую функцию для матричных элементов $\varrho_{\mathbf{mn}}$ оператора плотности $\hat{\varrho}$ в фоковском базисе. Эта производящая функция, в свою очередь, есть не что иное, как матричный элемент оператора плотности в базисе когерентных состояний,

$$< \beta \mid \hat{\varrho} \mid \alpha >= \exp\left(-\frac{\mid \alpha \mid^2}{2} - \frac{\mid \beta \mid^2}{2}\right) \sum_{\mathbf{m,n}=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^{\mathbf{m}} \alpha^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{m}!\mathbf{n}!)^{1/2}} \varrho_{\mathbf{mn}}. \tag{2}$$

Здесь и далее буквами α и β без индексов обозначены N-мерные векторы с комплексными компонентами. Другие обозначения следующие:

$$\mathbf{n}! = n_1! n_2! ... n_N!,\ \alpha^{\mathbf{n}} = \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} ... \alpha_N^{n_N},$$

$$\sum_{\mathbf{m,n}=0}^{\infty} = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_N=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} ... \sum_{n_N=0}^{\infty}.$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_{\mathbf{n}} = \varrho_{\mathbf{nn}}$.

N-модовое когерентное состояние $\mid \alpha >$ есть нормированное собственное состояние оператора уничтожения:

$$\hat{\mathbf{a}} \mid \alpha >= \alpha \mid \alpha > .$$

Чтобы перейти от функции Вигнера к матричному элементу оператора плотности в представлении когерентных состояний, надо вычислить $2N$-мерный интеграл перекрытия [17], [19]

$$< \beta \mid \hat{\varrho} \mid \alpha >= \frac{1}{(2\pi)^N} \int W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) W_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \tag{3}$$

где $W_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ – это преобразование Вигнера-Вейля оператора $\mid \alpha >< \beta \mid$, найденное в [17]:

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 2^N \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} - \alpha\beta^* - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 + \sqrt{2}\alpha(\mathbf{q} - i\mathbf{p}) + \sqrt{2}\beta^*(\mathbf{q} + i\mathbf{p})\right].$$

Введем $2N$-мерный комплексный вектор

$$\gamma = (\beta^*, \alpha),$$

являющийся композицией двух N-мерных векторов, и $2N$-мерную унитарную матрицу

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i\mathbf{I}_N & i\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \end{pmatrix},$$

удовлетворяющую соотношениям

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}^t\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_{2N},\ \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

("†" обозначает эрмитово сопряжение, "*" – комплексное сопряжение, и "t" – транспонирование; $\mathbf{I}_N$ – $N \times N$ единичная матрица.) Вычисляя гауссовский интеграл в правой части уравнения (3), мы получаем выражение

$$< \beta \mid \hat{\varrho} \mid \alpha >= \mathcal{P}_0 \exp\left(-\frac{|\gamma|^2}{2} - \frac{1}{2}\gamma\mathbf{R}\gamma + \gamma\mathbf{R}\mathbf{y}\right), \tag{5}$$

где симметричная $2N$-мерная матрица $\mathbf{R}$ и $2N$-мерный вектор $\mathbf{y}$ определяются соотношениями (мы учли тождества из (4))

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^\dagger(\mathbf{I}_{2N} - 2\mathbf{M})(\mathbf{I}_{2N} + 2\mathbf{M})^{-1}\mathbf{U}^*, \tag{6}$$

$$\mathbf{y} = 2\mathbf{U}^t(\mathbf{I}_{2N} - 2\mathbf{M})^{-1} < \mathbf{Q} > . \tag{7}$$

Множитель $\mathcal{P}_0$, который не зависит от вектора γ, есть не что иное как вероятность не зарегистрировать ни одного фотона. Он равен

$$\mathcal{P}_0 = \left[\det\left(\mathbf{M} + \frac{1}{2}\mathbf{I}_{2N}\right)\right]^{-1/2} \exp[- < \mathbf{Q} > (2\mathbf{M} + \mathbf{I}_{2N})^{-1} < \mathbf{Q} >].$$

Если $< \mathbf{Q} >= \mathbf{0}$, то вероятность не иметь ни одного фотона зависит от $2N - 1$ параметров, с точностью до численных множителей совпадающих с коэффициентами характеристического полинома матрицы дисперсий.

Функция $\exp(|\gamma|^2/2) < \beta \mid \hat{\varrho} \mid \alpha >$ является производящей функцией для элементов матрицы плотности в фоковском базисе. Сравнивая уравнения (2) и (5) с производящей функцией для полиномов Эрмита от $2N$ переменных [20],

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\mathbf{R}\gamma + \gamma\mathbf{R}\mathbf{y}\right) = \sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}=0}^{\infty} \frac{\beta^{*\mathbf{m}}\alpha^{\mathbf{n}}}{\mathbf{m}!\mathbf{n}!} H_{\mathbf{m},\mathbf{n}}^{\{\mathbf{R}\}}(\mathbf{y}), \tag{8}$$

мы видим, что функция распределения фотонов $\mathcal{P}_n$ выражается через "диагональные" многомерные полиномы Эрмита:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}} = \mathcal{P}_0 \frac{H_{\mathbf{nn}}^{\{\mathbf{R}\}}(\mathbf{y})}{\mathbf{n}!}. \tag{9}$$

Эта формула является специальным случаем формулы для матричных элементов оператора плотности в фоковском базисе, которая была получена в [15] методом канонического преобразования. Из определения (8) видно, что полиномы Эрмита многих переменных являются четными/нечетными функциями своих аргументов, если суммы их индексов является четным/нечетным числом. Следовательно, все диагональные полиномы Эрмита от многих переменных и, соответственно, функция распределения фотонов, являются четными функциями по отношению к вектору $\mathbf{y}$. В предельном случае, когда матрица дисперсий квадратур пропорциональна единичной матрице, $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{I}$, функция распределения (9) превращается в произведение N одномерных распределений Пуассона, описывающих независимые моды в когерентном состоянии.

2. Производящая функция и средние значения многомерных "диагональных" полиномов Эрмита

Производящая функция (8) задает разложение в ряд по степеням $2N$ дополнительных переменных γ_i. Однако для "диагональных" полиномов с $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ существует другая производящая функция, зависящая только от N дополнительных переменных. Чтобы получить их, введем N комплексных параметров λ_i, $i = 1, 2, ..., N$, и выберем вектор γ в следующем специальном виде:

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i}\chi_i^*, \ \gamma_{i+N} = \sqrt{\lambda_i}\chi_i, \ i = 1, 2, ..., N.$$

Умножая затем обе части выражения (8) на множитель $\exp(-\chi\chi^*)$ и вычисляя гауссовский интеграл

$$G(\lambda) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^N \int \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\mathbf{R}\gamma + \gamma\mathbf{z} - \chi\chi^*\right) d\chi d\chi^* =$$

$$= \sum_{\mathbf{n},\mathbf{m}=0}^{\infty} \lambda^{(\mathbf{m}+\mathbf{n})/2} \frac{H^{\{\mathbf{R}\}}_{\mathbf{nm}}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z})}{\mathbf{n}!\mathbf{m}!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^N \int \chi^{*\mathbf{n}} \chi^{\mathbf{m}} e^{-\chi\chi^*} d\chi d\chi^*$$

с учетом соотношения

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^N \int \chi^{*\mathbf{n}} \chi^{\mathbf{m}} e^{-\chi\chi^*} d\chi d\chi^* = \mathbf{n}!\delta_{\mathbf{nm}},$$

получаем следующее разложение:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda_2^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda_N^{n_N}}{n_N!} H^{\{\mathbf{R}\}}_{n_1 n_2 \ldots n_N n_1 n_2 \ldots n_N}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}) = \tag{10}$$

$$= \left[\det(\Lambda\Sigma_x\mathbf{R} + \mathbf{I}_{2N})\right]^{-1/2} \exp\left[\tfrac{1}{2}\mathbf{z}(\Lambda\Sigma_x\mathbf{R} + \mathbf{I}_{2N})^{-1} \textstyle\sum_x \Lambda\mathbf{z}\right].$$

Здесь $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{2N})$, $2N \times 2N$ матрица $\sum_x$ является $2N$-мерным аналогом матрицы Паули σ_x,

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^t \mathbf{U},$$

а диагональная $2N \times 2N$-матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \Lambda_j,$$

где каждая матрица Λ_j имеет только два ненулевых матричных элемента:

$$(\Lambda_j)_{jj} = (\Lambda_j)_{j+N,j+N} = 1.$$

Заметим, что матрица Λ коммутирует с матрицами $\sum_x$ и $\mathbf{U}$, но не коммутирует в общем случае с матрицей $\mathbf{R}$. Однако в одномодовом случае, когда все матрицы имеют только по две строки и два столбца, $\Lambda = \lambda\mathbf{I}_2$ и формулы могут быть упрощены [12].

Определим "средние значения" $< n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_N^{\alpha_N} >$ посредством соотношения

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_N^{\alpha_N} \frac{H^{\{\mathbf{R}\}}_{n_1 n_2 \ldots n_N n_1 n_2 \ldots n_N}(\mathbf{y})}{n_1! n_2! \ldots n_N!} =$$

$$=< n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} ... n_N^{\alpha_N} > \sum_{n_1=0}^{\infty} ... \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{H^{\{\mathbf{R}\}}_{n_1 n_2 ... n_N n_1 n_2 ... n_N}(\mathbf{y})}{n_1! n_2! ... n_N!}.$$

Очевидно, что они могут быть получены дифференцированием производящей функции по λ_j и приравниванием $\lambda_k = 1$ для всех $k = 1, 2, ...N$. Несложно продифференцировать матрицу, определяющую квадратичную форму в экспоненциальной функции, используя соотношение

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j} = \Lambda_j.$$

Чтобы продифференцировать детерминант матрицы, стоящий в предэкспоненциальном множителе, используем известную формулу

$$\frac{d}{dt} \log\det \mathbf{A}(t) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right).$$

Первые производные производящей функции задают средние значения первого порядка

$$< n_j >= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\Lambda_j \mathbf{S}] - 1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}\mathbf{R}\mathbf{S}\Lambda_j \mathbf{S}\Sigma_x \mathbf{R}\mathbf{y}, \tag{11}$$

где матрица $\mathbf{S}$ имеет вид

$$\mathbf{S} = (\Sigma_x \mathbf{R} + \mathbf{I}_{2N})^{-1}.$$

Ковариации

$$\sigma_{n_j n_k} =< n_j n_k > - < n_j >< n_k >$$

можно найти аналогично, вычисляя вторые производные производящей функции и вычитая из них произведения средних первого порядка. Для $j \neq k$, учитывая соотношения

$$\Lambda_j \Lambda_k = \mathbf{0}, \ \Lambda_j \Sigma_x = \Sigma_x \Lambda_j,$$

получаем

$$\sigma_{n_j n_k}(\mathbf{R}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\Lambda_j \mathbf{S} \Lambda_k \mathbf{S}] + \frac{1}{2}\mathbf{y}\mathbf{R}\mathbf{S}\Lambda_j \mathbf{S}\Lambda_k \mathbf{S}\Sigma_x \mathbf{R}\mathbf{y}. \tag{12}$$

Вторая производная производящей функции по одному и тому же аргументу λ_j дает $< n_j(n_j - 1) >$. Учитывая, что $\Lambda_j^2 = \Lambda_j$, имеем следующее выражение для дисперсий:

$$\sigma_{n_j n_j}(\mathbf{R},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\Lambda_j \mathbf{S}(\Lambda_j \mathbf{S} - \mathbf{I}_{2N})] + \frac{1}{2}\mathbf{y}\mathbf{R}(2\mathbf{S}\Lambda_j - \mathbf{I}_{2N})\mathbf{S}\Lambda_j\mathbf{S}\Sigma_x\mathbf{R}\mathbf{y}. \tag{13}$$

Уравнения (10)-(13) верны для любой симметричной матрицы $\mathbf{R}$. Однако эти выражения можно существенно упростить, если учесть специальную форму матрицы $\mathbf{R}$ (6) и вектора $\mathbf{y}$ (7). Используя тождества (4), получаем соотношения

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^t(\mathbf{I}_{2N} + 2\mathbf{M})\mathbf{U}^*,\ \mathbf{RS} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^\dagger(\mathbf{I}_{2N} - 2\mathbf{M})\mathbf{U}^*,$$

$$\mathbf{S}\Sigma_x = \frac{1}{2}\mathbf{U}^t(\mathbf{I}_{2N} + 2\mathbf{M})\mathbf{U},\ \mathbf{S}\Sigma_x\mathbf{R} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^t(\mathbf{I}_{2N} - 2\mathbf{M})\mathbf{U}^*.$$

Тогда уравнение (11) принимает вид

$$< n_j >= \frac{1}{2}[\mathrm{Tr}(\Lambda_j\mathbf{M}) - 1] + \frac{1}{2} < \mathbf{Q} > \Lambda_j < \mathbf{Q} >=$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_{p_j p_j} + \sigma_{q_j q_j} - 1) + \frac{1}{2}(< p_j >^2 + < q_j^2 >).$$

Последнее выражение совершенно очевидно с физической точки зрения. Аналогичное упрощение выражения (13) приводит к формуле

$$\sigma_{n_j n_j} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{M}_j^2) - \frac{1}{4} + < \mathbf{Q} > \mathbf{M}_j < \mathbf{Q} >=$$

$$= \frac{1}{2}(T_j^2 - 2d_j - \frac{1}{2}) + < \mathbf{Q}_j > \mathcal{M}_j < \mathbf{Q}_j >,$$

где T_j и d_j – след и детерминант 2×2-матрицы $\mathcal{M}_j$, матричные элементы которого совпадают с ненулевыми элементами матрицы $\mathbf{M}_j = \Lambda_j\mathbf{M}\Lambda_j$ (очевидно, это эффективная матрица дисперсий квадратурных компонент j-ой моды), а двумерный вектор $\mathbf{Q}_j$ состоит из компонент (p_j, q_j).

Корреляции числа фотонов в разных модах задаются аналогичным выражением:

$$\sigma_{n_j n_k} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\Lambda_j\mathbf{M}\Lambda_k\mathbf{M}) + \frac{1}{2} < \mathbf{Q} > \Lambda_j\mathbf{M}\Lambda_k < \mathbf{Q} > .$$

3. Распределения фотонов для чистых многомодовых состояний

Полученные в предыдущих разделах формулы справедливы для любого гауссовского состояния, которое в общем случае является *смешанным квантовым состоянием*, т.е.

$$\mu = \mathrm{Tr}\hat{\varrho}^2 \leq 1,\ \mathrm{Tr}\hat{\varrho} = 1. \tag{14}$$

"Коэффициент смешивания" может быть выражен в терминах функции Вигнера следующим образом [19, 21, 22],

$$\mu = \frac{1}{(2\pi)^N} \int W^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

Вычисляя этот интеграл для гауссовских состояний (1), получаем простое соотношение [22]

$$\mu = 2^{-N} (\det \mathbf{M})^{-1/2}.$$

Следовательно, ограничение (14) для гауссовских состояний эквивалентно следующему неравенству:

$$\det \mathbf{M} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^N, \tag{15}$$

которое есть не что иное как простейшая форма *обобщенного соотношения неопределенностей* [17]. В частности, для $N = 1$ неравенство (15) превращается в соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона [23]

$$\sigma_{pp}\sigma_{qq} - \sigma_{pq}^2 \geq \frac{1}{4}.$$

В этом разделе мы будем рассматривать *чистые* гауссовские состояния, когда в формулах (14) и (15) выполнено строгое равенство. В этом случае квантовое состояние на самом деле описывается *волновой функцией*, имеющей вдвое меньше переменных, чем матрица плотности. Вследствие этого формулы для функции распределения фотонов существенно упрощаются. А именно, можно перейти от полиномов Эрмита от двух переменных к N-мерным полиномам Эрмита.

Рассмотрим неоднородное каноническое линейное преобразование операторов рождения и уничтожения фотонов

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{b}}^\dagger \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{pmatrix}, \ \Omega = \begin{pmatrix} \zeta & \eta \\ \eta^* & \zeta^* \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где Ω – симплектическая $2N \times 2N$-матрица, состоящая из четырех N-мерных комплексных квадратных блоков, а $\mathbf{d}$ – комплексный N-вектор. Обозначив собственные состояния операторов $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$ как $| \alpha >$ и $| \beta >$, можно получить формулу (ее вывод дан в [16, 17, 24]),

$$\exp\left(\frac{|\alpha|^2}{2}+\frac{|\beta|^2}{2}\right)<\alpha^*\mid\beta>=\mathcal{F}_0(\beta)\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^*\zeta^{-1}\eta\alpha^*+\alpha^*\zeta^{-1}(\beta-\mathbf{d})\right], \tag{17}$$

где

$$\mathcal{F}_0(\beta)=(\det\zeta)^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}\beta\eta^*\zeta^{-1}\beta+\beta(\mathbf{d}^*-\eta^*\zeta^{-1}\mathbf{d})+\frac{1}{2}\mathbf{d}\eta^*\zeta^{-1}\mathbf{d}-\frac{1}{2}|\mathbf{d}|^2\right]. \tag{18}$$

Здесь параметр β должен рассматриваться как метка состояния, а α^* – как переменная. Разлагая правую часть уравнения (17) в ряд по степеням α^* и учитывая выражение (8), получаем, что функция распределения фотонов в состоянии $|\beta>$ (которое, в общем случае, является сжатым когерентным состоянием) выражается через полиномы Эрмита от N переменных:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}}=\frac{\mathcal{P}_0(\beta)}{\mathbf{n}!}\left|H_{\mathbf{n}}^{\{\zeta^{-1}\eta\}}\left(\eta^{-1}[\beta-\mathbf{d}]\right)\right|^2,\ \mathcal{P}_0(\beta)=|\mathcal{F}_0(\beta)|^2\exp(-|\beta|^2). \tag{19}$$

Аналогичная формула для вероятностей переходов между начальным и конечным фоковскими состояниями многомерного параметрического осциллятора была получена в [16, 17].

Сравнивая выражения (9) и (19), мы можем получить новое соотношение между полиномами Эрмита от $2N$ и N переменных для некоторой специальной формы матрицы $\mathbf{R}$. Решая уравнение (6) по отношению к матрице $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}_{2N}-\mathbf{URU}^t)(\mathbf{I}_{2N}+\mathbf{URU}^t)^{-1}, \tag{20}$$

видим, что класс специальных матриц определяется условием

$$\det(\mathbf{I}_{2N}-\mathbf{URU}^t)=\det(\mathbf{I}_{2N}+\mathbf{URU}^t). \tag{21}$$

Матрица дисперсий в любом собственном состоянии оператора $\hat{\mathbf{b}}$, определенного уравнением (16), выражается через симплектическую матрицу Ω следующим образом

$$\mathbf{M}=-\frac{1}{2}\mathbf{U}\Sigma_y\Omega^t\Sigma_x\Omega\Sigma_y\mathbf{U}^t, \tag{22}$$

где $2N\times 2N$-матрица $\sum_y$ является многомерным аналогом матрицы Паули σ_y. Следовательно, для любой матрицы $\mathbf{R}$, удовлетворяющей условию (21), выполнено соотношение

$$H_{\mathbf{nn}}^{\{\mathbf{R}\}}(\mathbf{y})=|H_{\mathbf{n}}^{\{\zeta^{-1}\eta\}}(\tilde{\mathbf{y}})|^2, \tag{23}$$

где матрицы ζ и η связаны с матрицей $\mathbf{R}$ посредством уравнений (20) и (22), а N-мерный вектор $\tilde{\mathbf{y}}$ связан с $2N$-мерным вектором $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1^*)$ (выражение (23) верно лишь при такой специфической форме вектора $\mathbf{y}$) соотношением:

$$\begin{pmatrix} \eta\tilde{\mathbf{y}} \\ \eta^*\tilde{\mathbf{y}}^* \end{pmatrix} = \Omega\mathbf{R}(\mathbf{I}_{2N} + \Sigma_x\mathbf{R})^{-1}\mathbf{y}. \tag{24}$$

Вводя N-мерные векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ согласно формуле

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{I}_{2N} + \Sigma_x\mathbf{R})^{-1}\mathbf{y},$$

мы легко получаем из (24) следующее выражение для вектора $\tilde{\mathbf{y}}$:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \eta^{-1}\zeta\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2.$$

Следовательно, нам понадобятся не все элементы матрицы Ω, а только матрица $\zeta^{-1}\eta$. Замечательно, что эта матрица может быть найдена в явном виде. Для этого перепишем уравнение (22) в следующем виде:

$$\Omega^t\Sigma_x\Omega = -2\Sigma_y\mathbf{U}^\dagger\mathbf{M}\mathbf{U}^*\Sigma_y. \tag{25}$$

Теперь вспомним, что Ω *симплектическая* матрица, т.е. удовлетворяет равенству

$$\Omega^t\Sigma_y\Omega = \Sigma_y. \tag{26}$$

Умножая обе части уравнения (26) на i и вычитая их из уравнения (25), получаем в левой части матрицу

$$\Sigma_- = \Sigma_x - i\Sigma_y \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{I}_N & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем соотношение

$$\begin{pmatrix} \eta^\dagger\zeta & \eta^\dagger\eta \\ \zeta^\dagger\zeta & \zeta^\dagger\eta \end{pmatrix} = -\Sigma_y\mathbf{U}^\dagger\mathbf{M}\mathbf{U}^*\Sigma_y - \frac{i}{2}\Sigma_y \equiv \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\zeta^{-1}\eta = \mu_{21}^{-1}\mu_{22}.$$

В заключение рассмотрим функцию распределения фотонов *сжатого фоковского состояния* $|\,\mathbf{m}>$, определенного разложением

$$|\,\beta>=\exp\left(-\frac{|\,\beta\,|^2}{2}\right)\sum_{\mathbf{m}=0}^{\infty}\frac{(\beta)^{\mathbf{m}}}{(\mathbf{m}!)^{1/2}}\,|\,\mathbf{m}>.$$

Выражения (17) и (18) приводят к формуле

$$\mathcal{P}_{\mathbf{n}}=|\det\zeta\,|^{-1}\exp[\mathrm{Re}(\mathbf{d}\eta^*\zeta^{-1}\mathbf{d})-|\,\mathbf{d}\,|^2]\frac{|\,H^{\{\mathbf{R}\}}_{\mathbf{nm}}(\mathbf{L})\,|^2}{\mathbf{n}!\mathbf{m}!}.$$

Здесь $\mathbf{m}$ – это номер состояния, тогда как $\mathbf{n}$ – дискретная векторная переменная. $2N\times 2N$-матрица $\mathbf{R}$ и $2N$-вектор $\mathbf{L}$ выражены теперь через блоки матрицы Ω и вектора $\mathbf{d}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\zeta^{-1}\eta & -\zeta^{-1}\\ -\zeta^{-1} & -\eta^*\zeta^{-1}\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\mathbf{R}^*\begin{pmatrix}-\zeta^{-1}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}^*-\eta^*\zeta^{-1}\mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Итак, мы продемонстрировали, что для любого чистого гауссовского N-модового состояния формула (9), выражающая функцию распределения фотонов через полиномы Эрмита с $2N$ индексами, может быть заменена более простым выражением через полиномы Эрмита с N индексами, согласно формуле (23).

4. Заключение

Мы показали, что функция распределения фотонов как для многомодового смешанного гауссовского состояния света, так и для многомодового сжатого фоковского состояния может быть выражена через полиномы Эрмита от нескольких переменных. Физический смысл смешанного гауссового состояния света может быть понят, если принять во внимание, что чистое многомодовое гауссовое состояние соответствует обобщенному коррелированному состоянию, введенному Сударшаном [25], который связал эти состояния с симплектической динамической группой. Одномодовое коррелированное состояние было введено в [26] как состояние, минимизирующее соотношение неопределенностей Шредингера [23]. В статье [25] была уяснена связь данного состояния с симплектической группой $ISp(2,R)$ и было сделано обобщение на случай многомодового коррелированного состояния на основе свойств симметрии группы $ISp(2N,R)$. Как было показано в предыдущих разделах, обобщенные корелированные состояния, построенные Сударшаном [25] на основании свойств симметрии, удовлетворяют также условию

минимизации многомодового соотношения неопределенностей Шредингера, поскольку детерминант матрицы дисперсий принимает минимально допустимое значение как раз для этих состояний. С этой точки зрения многомодовые коррелированные состояния света обладают как свойством одномодового коррелированного состояния минимизировать обобщенное произведение неопределенностей, так и свойством быть полученными действием малой группы вакуумного состояния, задающей однородное многообразие полной группы линейных канонических преобразований. Изученные выше смешанные гауссовские состояния могут рассматриваться как смесь обобщенных коррелированных состояний плюс тепловой шум. Существенно, что, вообще говоря, этот тепловой шум не описывается одной и той же температурой для всех мод. В общем случае смешанного гауссовского света каждая мода может обладать своей собственной температурой. Итак, смешанный гауссовский свет является обобщенным коррелированным светом, каждая нормальная мода которого взаимодействует со своей собственной тепловой баней. Оператор плотности такого состояния может быть получен общим симплектическим каноническим преобразованием из произведения обычных тепловых состояний осцилляторов электромагнитного поля, каждое из которых описывается распределением Планка со своей собственной температурой.

Авторы признательны профессору Э. Сударшану за проявленный интерес к работе и полезные замечания. В. И. Манько благодарен ИНФН и Университету Неаполя "Федерик II" за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Stoler D., Phys. Rev., **D1**, 3217 (1970).

[2] Walls D. F., Nature, **306**, 141 (1983).

[3] Vourdas A., Phys. Rev., **A34**, 3466 (1986); Vourdas A., Weiner R. M. ibid, **A36**, 586 (1987).

[4] Agarwal G. S., J. Mod. Opt., **34**, 909 (1987).

[5] Agarwal G. S., Adam G., Phys. Rev., **A38**, 750 (1988).

[6] Fearn H., Collett M. J., J. Mod. Opt., **35**, 553 (1988).

[7] Agarwal G. S., Adam G., Phys. Rev., **A39**, 6259 (1989).

[8] Kim M. S., de Oliveira F. A. M., Knight P. L., Phys. Rev., **A40**, 2494 (1989).

[9] Chaturvedi S., Srinivasan V., Phys. Rev., **A40**, 6095 (1989).

[10] Adam G., Phys. Lett., **A171**, 66 (1992).

[11] Marian P., Marian T. M., Phys. Rev., **A47**, 4474 (1993).

[12] Dodonov V. V., Man'ko O. V., Man'ko V. I., "Photon distribution for one-mode mixe light with generic gaussian Wigner function", University of Napoli preprint INFN-NA IV-93/35, DSF-T-93/35 (1993); Phys. Rev. A (в печати).

[13] Caves C. M., Chang Zhu, Milburn G. L., Schleich W., Phys. Rev., **A43**, 3854 (1991).

[14] Schrade G., Akulin V., Man'ko V. I., Schleich W., Phys. Rev., **A48**, 2398 (1993).

[15] Dodonov V. V., Man'ko V. I., Semjonov V. V., Nuovo Cimento, **B83**, 145 (1984); см. также: Man'ko V. I. in Proceedings of Workshop "Harmonic Oscillators", University of Maryland, March 25-28, 1992. Edited by D. Han, Y S. Kim, and Man'ko V. I. in Proceedings of Workshop W. W. Zachary. NASA Conference Publication **3197**, p. 12 (1993). "Harmonic Oscillators", University of Maryland, March 25-28, 1992.

[16] Malkin I. A., Man'ko V. I., Trifonov D. A., J. Math. Phys., **14**, 576 (1973).

[17] Додонов В. В., Манько В. И. Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем, Труды ФИАН, **183** (1987).

[18] Kauderer M., J. Math. Phys., **34**, 4221 (1993).

[19] Wigner E. P. In Perspectives in Quantum Theory, edited by W. Yourgrau and A. van der Merwe. Cambridge, Mass., MIT Press, 1971, p. 25; Hillery M., O'Connell R. F., Scully M. O., Wigner E. P., Phys. Repts, **106**, 121 (1984).

[20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. **2**, М., Наука, 1966.

[21] Bopp F., Ann. Inst. Henri Poincaré, **XV**, 81 (1956); Татарский В. И. УФН, **139**, 58 (1983).

[22] Додонов В. В., Манько В. И. Труды ФИАН, **167**, 7 (1987).

[23] Schrödinger E., Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, **24**, 296 (1930); Robertson H. P., Phys. Rev., **35**, 667 (1930).

[24] Wolf K. B., J. Math. Phys., **15**. 1295 (1974); Kramer P., Moshinsky M., Seligman T. H. In Group Theory and its Applications, edited by E. M. Loebl, New York, Academic, 1975, p. 249.

[25] Sudarshan E. C. G. In Proceedings of Second International Workshop on

Squeezed State and Uncertainty Relations, Moscow, 25-29 May, 1992, ed. D. Han, Y. S. Kim, V. I. Man'ko. Washington, NASA Conference Publication 3219, 1933, p. 241.

[26] Dodonov V. V., Kurmyshev E. V., Man'ko V. I., Phys. Lett., **A79**, 150 (1980).

Поступила в редакцию 18 марта 1994 г.