УДК 530.145.1

СТРУКТУРА КОНФОРМНЫХ ПАРЦИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

В. Н. Зайкин, М. Я. Пальчик[1]

Предложен новый способ решения моделей конформно-инвариантной теории поля, который, с одной стороны, позволяет воспроизвести результаты, полученные для двумерных моделей, а с другой стороны допускает обобщение на D-мерное пространство.

Основные результаты, касающиеся двумерных точно решаемых моделей квантовой теории поля, могут быть получены из анализа операторных разложений типа:

$$\theta_{\mu\nu}(x)\varphi(0) = \sum_{l,s} P_s^l(0),\ \theta_{\mu\nu}(x)P_s^l(0) = \sum_{l',s'\geq s} P_{s'}^{l'}(0), \ldots \tag{1}$$

где $\theta_{\mu\nu}$ – поле тензора энергии-импульса, φ,– фундаментальное поле, P_s^l – вторичные поля со спином s и масштабной размерностью l.

Все известные точно решаемые модели в двумерном пространстве основаны на требовании бесконечнопараметрической конформной симметрии теории. Это условие, однако, не имеет ясного аналога в D-мерном пространстве и общепринятый метод решения не допускает обобщения на D-мерный случай. Кроме того, в двумерном пространстве могут существовать модели, в которых бесконечнопараметрическая симметрия нарушена до шестипараметрической малой конформной группы.

Настоящей публикацией мы начинаем обсуждение нового способа решения конформных моделей, который, с одной стороны, позволяет воспроизвести результаты, полученные для двумерных моделей, а с другой – допускает обобщение на D-мерный случай.

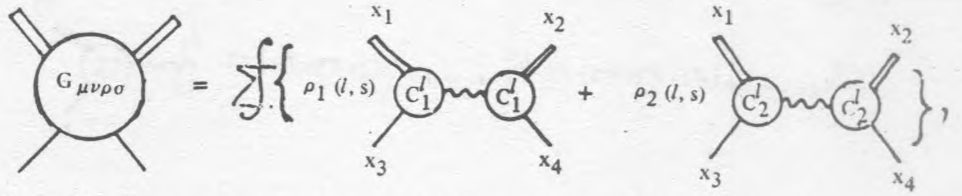
[1]Институт автоматики и электрометрии, Новосибирск, и ICAST, Michigan.

Этот способ основан только на свойствах разложения (1) и требовании обычной конформной симметрии. Операторные разложения типа (1) могут быть получены из анализа конформных парциальных разложений функций Грина, инвариантных относительно малой конформной группы. Полюса ядер этих разложений определяют вклады полей P_s^l в. разложение (1).

Целью настоящей статьи является вычисление ядер парциального разложения для наиболее важного случая функции Грина, включающей два тензора энергии-импульса,

$$G_{\mu\nu;\rho\sigma}(x_1, x_2; x_3, x_4) = < T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) >, \tag{2}$$

в случае двумерного пространства. В следующих работах мы рассмотрим обобщение этих результатов на D-мерное пространство. Искомое парциальное разложение имеет вид:



(3)

где $\rho_1(l, s)$, $\rho_2(l, s)$ – ядра парциального разложения, C_1^l и C_2^l – конформно-инвариантные трехточечные функции, явный вид которых приведен ниже. Обозначения и вывод парциальных разложений можно найти в работах [1, 2], а обзор современного состояния проблемы в работе [4].

Мы покажем, что оба ядра в разложении (3) при любом фиксированном s имеют полюса по переменной l в точках

$$l = l_s = d + s, \tag{4}$$

где d – масштабная размерность фундаментального поля. Оказывается, что ядро $\rho_2(l, s)$ имеет полюс первого порядка, а ядро $\rho_1(l, s)$ – полюс второго порядка. Функция C_1^l состоит только из квазилокальных членов при $l = d+s$, а функция C_2^l содержит еще и локальные члены. В следующих работах мы покажем, что подобная структура парциальных разложений является общей для некоторого класса моделей в D-мерном пространстве.

Согласно теории парциальных разложений это означает, что поля P_s^{d+s} связаны только со вторым слагаемым в разложении (3). Требование равенства нулю одного из полей P_s^{d+s} фиксирует модель [1, 3]. Простейшая модель определяется условием

$$P_{\mu\nu}^{d+2}(x) = 0, \ s = 2 \tag{5}$$

и совпадает с моделью Изинга. Уравнение (5) означает, что $Res_{l=d+s}\rho_2(l,s)=0$. Если подставить в это уравнение найденное ниже выражение для $\rho_2(l,s)$, то получим известную связь между центральным зарядом и размерностью фундаментального поля:

$$C=-d(4d-5)/(d+1). \tag{6}$$

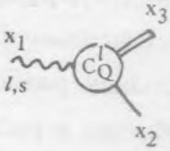
Нашим основным результатом является установление структуры парциального разложения и вида функций $C^l_{r'}$. В следующих работах этот результат будет обобщен на D-мерный случай. Кроме того, таким способом можно исследовать модели, в которых бесконечнопараметрическая симметрия нарушена.

В двумерном пространстве существует две независимых конформно-инвариантных трехточечных функции:

$$C^l_{R\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)=E^l_{2\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)= \tag{7}$$

$$C^l_{Q\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)=$$

$$=(l-d-s)\{E^l_{1\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)-\tfrac{1}{4s}E^l_{2\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)\}= \tag{8}$$



,

где

$$E^l_{1\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)=\lambda^{x_3}_{\rho\sigma}(x_1x_2)\lambda^{x_1}_{\mu_1\ldots\mu_s}(x_3x_2)\Delta_E(x_1,x_2,x_3),$$

$$E^l_{2\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x^2_{13}}\sum_{k=1}^{s}\{\lambda^{x_3}_{\sigma}(x_1x_2)g_{\rho\mu_k}(x_{13})+\lambda^{x_3}_{\rho}(x_1x_2)g_{\sigma\mu_k}(x_{13})-\text{след по }\rho,\sigma\}\times$$

$$\times\lambda^{x_1}_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_k\ldots\mu_s}(x_3x_2)\Delta_E(x_1,x_2,x_3),$$

$$\Delta_E(x_1,x_2,x_3)=(x^2_{13})^{-(l-d-s)/2}(x^2_{23})^{-(l-d-s)/2}(x^2_{12})^{-(l+d-s)/2}.$$

Парциальное разложение типа (3) по этому базису недиагонально и содержит три ядра $(\rho_{RR},\rho_{RQ}=\rho_{QR},\rho_{QQ})$, которые вычислены ниже. Разложение становится диагональным, если перейти к новому базису:

$$C_1^l = N_1(l)\{\alpha(l)C_R^l + C_Q^l\}, \tag{9}$$

$$C_2^l = N_2(l)\{C_R^l + \beta(l)C_Q^l\}, \tag{10}$$

где $\alpha(l)$ и $\beta(l)$ связаны условием

$$\alpha(l)\rho_{QQ}(l) + \beta(l)\rho_{RR}(l) - \alpha(l)\beta(l)\rho_{RQ}(l) = \rho_{RQ}(l). \tag{11}$$

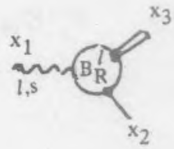
При этом:

$$\rho_1(l) = \frac{1}{N_1^2(l)}[\rho_{QQ}(l) - 2\beta(l)\rho_{RQ}(l) + \beta^2(l)\rho_{RR}(l)], \tag{12}$$

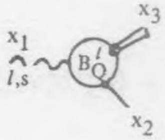
$$\rho_2(l) = \frac{1}{N_2^2(l)}[\rho_{RR}(l) - 2\alpha(l)\rho_{RQ}(l) + \alpha^2(l)\rho_{QQ}(l)]. \tag{13}$$

Для нахождения ядер ρ_{RR}, ρ_{RQ} и ρ_{QQ} необходимо рассмотреть так называемые "ампутированные" функции:

$$B_R^l(x_1,x_2,x_3) = [H^l_{1\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3) - \frac{1}{2s}H^l_{2\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3)] \equiv \tag{14}$$



$$B_Q^l(x_1,x_2,x_3) = (l-d-s)H^l_{2\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3) \equiv \tag{15}$$



где

$$H^l_{1\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3) = (\delta_{\rho\tau}\partial_\sigma^{x_3} + \delta_{\sigma\tau}\partial_\rho^{x_3} - \delta_{\rho\sigma}\partial_\tau^{x_3})[\lambda_\tau^{x_3}(x_1x_2)\lambda^{x_1}_{\mu_1\ldots\mu_s}(x_3x_2)\Delta_H(x_1x_2x_3)],$$

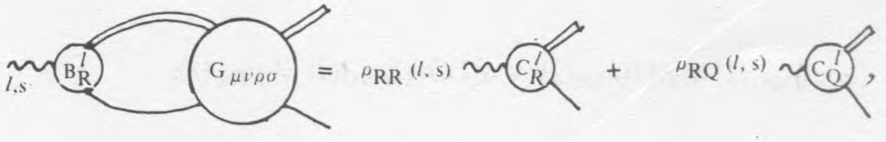
$$H^l_{2\,\mu_1\ldots\mu_s;\rho\sigma}(x_1,x_2,x_3) = (\delta_{\rho\tau}\partial_\sigma^{x_3} + \delta_{\sigma\tau}\partial_\rho^{x_3} - \delta_{\rho\sigma}\partial_\tau^{x_3})\{\frac{1}{x_{13}^2}\sum_{k=1}^{s} g_{\tau\mu_k}(x_{13})\lambda^{x_1}_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_k\ldots\mu_s}(x_3x_2)\times$$

$$\times\Delta_H(x_1x_2x_3)\},$$

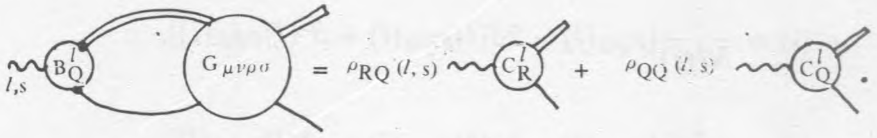
$$\Delta_H(x_1, x_2, x_3) = (x_{13}^2)^{-(l+d-s-4)/2}(x_{23}^2)^{-(s-l-d)/2}(x_{12}^2)^{-(l-d-s-4)/2},$$

$N_R(l)$ и $N_Q(l)$ – известные нормировочные множители.

Эти функции обладают следующими свойствами:



(16)



(17)

Интегралы в левых частях равенств (16) и (17) могут быть вычислены непосредственно, если воспользоваться свойствами функций B, а также общим видом тождества Уорда для функции $G_{\mu\nu\rho\sigma}$ в двумерном пространстве:

$$\partial_\mu^{x_1} G_{\mu\nu\rho\sigma}(x_1x_2x_3x_4) = -\{\delta(x_{13})\partial_\nu^{x_3} + \delta(x_{14})\partial_\nu^{x_4} - \frac{d}{2}\partial_\nu^{x_1}\delta(x_{14})\}\times$$

$$\times < \theta_{\rho\sigma}(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) > +$$

$$+ \{\partial_\rho^{x_1}\delta(x_{12}) < \theta_{\nu\sigma}(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) > +\partial_\sigma^{x_1}\delta(x_{12}) < \theta_{\nu\rho}(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) > - \qquad (18)$$

$$-\delta_{\rho\sigma}\partial_\tau^{x_1}\delta(x_{12}) < \theta_{\nu\tau}(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) > -\frac{C}{24\pi}\{\partial_\nu^{x_1}(\partial_\rho^{x_1}\partial_\sigma^{x_1} - \frac{1}{2}\delta_{\rho\sigma}\Box^{x_1})\delta(x_{12}) -$$

$$-\frac{1}{4}(\delta_{\nu\rho}\partial_\sigma^{x_1} + \delta_{\nu\sigma}\partial_\rho^{x_1} - \delta_{\rho\sigma}\partial_\nu^{x_1})\,\Box^{x_1}\,\delta(x_{12})\} < \varphi(x_3)\varphi(x_4) > .$$

Подставляя тождество Уорда (18) в левые части равенств (16) и (17) и проводя необходимые вычисления, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости, получим:

$$\rho_{RR}(l) = \frac{1}{l-d-s}\tilde{\rho}_{RR}(l), \;\; \rho_{RQ}(l) = \frac{1}{l-d-s}\tilde{\rho}_{RQ}(l), \;\; \rho_{QQ}(l) = \frac{1}{(l-d-s)^2}\tilde{\rho}_{QQ}(l), \qquad (19)$$

где функции $\tilde{\rho}_{RR}(l)$, $\tilde{\rho}_{RQ}(l)$, $\tilde{\rho}_{QQ}(l)$ не имеют особенностей и не обращаются в нуль при $l = d + s$. Например,

$$\tilde{\rho}_{RR}(l)\,|_{l=d+s} = d(d+s-2)(s+1) - 4 + 4\frac{\Gamma(d+s-2)}{\Gamma(s+2)\Gamma(d-2)}[s^2 + s(d-1) + 1] + \tag{20}$$

$$+\frac{C}{6}\;\frac{\Gamma(d+s+1)}{\Gamma(s-1)\Gamma(d+1)}.$$

Подставляя (19) в уравнение (11), получаем

$$\alpha(l)\frac{1}{(l-d-s)^2}\tilde{\rho}_{QQ}(l) + \beta(l)\frac{\tilde{\rho}_{RR}(l)}{l-d-s} - \alpha(l)\beta(l)\frac{\tilde{\rho}_{RQ}(l)}{l-d-s} = \tag{21}$$

$$= \frac{\tilde{\rho}_{RQ}(l)}{l-d-s}.$$

Если исключить из рассмотрения сингулярный выбор коэффициентов $\alpha(l)$ и $\beta(l)$, то при $l \to d + s$ коэффициенты $\alpha(l)$ и $\beta(l)$ должны вести себя следующим образом:

$$\alpha(l)\,|_{l=d+s} \sim (l-d-s),\;\; \beta(l)\,|_{l=d+s} \sim \mathrm{const}.$$

Следовательно, искомые спектральные плотности диагонального парциального разложения $\rho_1(l)$ и $\rho_2(l)$ вблизи точки $l = d + s$ имеют вид:

$$\rho_1(l)\,|_{l=d+s} = (l-d-s)^{-2}\tilde{\rho}_{QQ}(d),\;\; \rho_2(l)\,|_{l=d+s} = (l-d-s)^{-1}\tilde{\rho}_{RR}(d), \tag{22}$$

а функции, по которым ведется разложение,

$$C_1^l = N_1(l)C_Q^l, \tag{23}$$

$$C_2^l = N_2(l)\{C_R^l + \beta(l)C_Q^l\}, \tag{24}$$

где $\beta(l)$ определяется из (21).

Как говорилось ранее, конкретная конформно-инвариантная модель определяется условием (5), что в данном случае означает

$$\tilde{\rho}_{RR}(l)\,|_{l=d+s,\;s=2} = 0. \tag{25}$$

Подставляя в (20) $s = 2$, получим уравнение (6).

В следующих работах мы продемонстрируем, что соотношения типа (22) – (24) справедливы и в D-мерных конформных теориях.

Один из авторов (В. З.) выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (проект 93-02-15541) за поддержку данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fradkin E. S. and Palchik M. Ya., Phys. Rep., **44**, 249 (1978).

[2] Dobrev V. K., Mack G., Petkova V. B., Petrova S. G., and Todorov I. T., Lecture Notes in Physics, Springer, 1977.

[3] Fradkin E. S. and Palchik M. Ya., Proc. of 2nd Seminar: Group Theoretical methods in Physics, eds. M. A. Markov, V. I. Man'ko, and A. E. Shabad, Harwood, 1983, p. 84.

[4] Fradkin E. S. and Palchik M. Ya., International Journal of Modern Physics A, **5**, 3463 (1990).

Поступила в редакцию 27 апреля 1994 г.