УДК 530.145.1

АНОМАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА УОРДА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В D-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Н. Зайкин, М. Я. Пальчик[1]

Исследована структура аномальных конформных тождеств Уорда в D-мерном пространстве. Показано, что в эти тождества входит ряд свободных числовых параметров, а аналогом центрального заряда является скалярное поле с масштабной размерностью D–2.

В предыдущей статье [1] мы начали обсуждение нового подхода к решению конформно-инвариантных моделей теории поля. Его существенной особенностью является то, что бесконечнопараметрическая симметрия не предполагается заранее, а потому разрабатываемый метод допускает обобщение на D-мерное пространство. В настоящей статье обсуждается структура аномальных конформных тождеств Уорда в D-мерном пространстве. В частности, мы покажем, что в эти тождества Уорда входит ряд свободных числовых параметров, а аналогом центрального заряда в D-мерном пространстве является скалярное поле с масштабной размерностью D–2. В следующей работе будет найдено конформное парциальное разложение, основанное на этих тождествах Уорда. Математический аппарат, позволяющий решить поставленную задачу, принципиально развит в работах [2, 3].

Ниже мы ограничимся выводом тождества Уорда для четырехточечной функции Грина, включающей два сохраняющихся тензора энергии-импульса и два скалярных поля:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, x_3; x_2, x_4) = < T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4)) > . \qquad (1)$$

[1]Институт автоматики и электрометрии, Новосибирск, и ICAST, Michigan.

Регулярный способ получения тождества Уорда для функции (1) состоит в том, чтобы прежде всего выписать все допустимые лоренц-инвариантные структуры с подходящими масштабными размерностями, а затем уже из требования конформной инвариантности получить значения коэффициентов при этих структурах. Среди них могут встретиться аномальные вклады, включающие функции Грина скалярных или тензорных полей с целыми размерностями. Например,

$$\partial_\mu^{x_1} G_{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, x_3; x_2, x_4) = \ldots + \partial_\nu^{x_1}\delta(x_{13}) \times$$

$$\times \left[\partial_\rho^{x_3}\partial_\sigma^{x_3} - D^{-1}\delta_{\rho\sigma}\Box^{x_3}\right] < P^{D-2}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) >, \tag{2}$$

где $P^{D-2}(x)$ – скалярное поле с размерностью D–2. Кроме того, могут входить члены, включающие векторные и тензорные поля, структура которых зависит от размерности пространства.

Ниже мы ограничимся изучением вклада в тождество Уорда скалярного поля $P^{D-2}(x)$. Это поле существует при любой размерности пространства и является аналогом центрального заряда двумерных теорий. Действительно, трехточечная конформно-инвариантная функция, включающая это поле, имеет вид:

$$< P^{D-2}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) > = \frac{1}{24\pi} C \left(\frac{x_{24}^2}{x_{23}^2 x_{34}^2}\right)^{(D-2)/2} < \varphi(x_2)\varphi(x_4) > . \tag{3}$$

Если положить здесь $D = 2$, то зависимость от x_3 исчезает и поле P^{D-2} обращается в константу

$$P^{D-2}(x)|_{D=2} = \frac{1}{24\pi} C. \tag{4}$$

Нормировка поля P^{D-2} выбрана таким образом, чтобы константа C совпадала с центральным зарядом.

Для практических вычислений удобно воспользоваться тем фактом, что структура коэффициентов при аномальных вкладах, связанных с полем P^{D-2}, в тождестве Уорда для функции $< T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)\ldots) >$ не зависит от типа остальных полей. В частности, она одинакова для функций $< T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4)) >$ и $< T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)P^{D-2}(x_2)) >$. Воспользуемся теперь тем, что координатная зависимость функции $< T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)P^{D-2}(x_2)) >$ известна точно[2]:

[2]Обозначения совпадают со стандартными (см., например, [2]).

$$< T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)P^{D-2}(x_2)) >= \{a_1\lambda^{x_1}_{\mu\nu}(x_3x_2)\lambda^{x_3}_{\rho\sigma}(x_1x_2) +$$

$$+ a_2 x_{13}^{-2}[\lambda^{x_1}_{\mu}(x_3x_2)(g_{\nu\rho}(x_{13})\lambda^{x_3}_{\sigma}(x_1x_2) + g_{\nu\sigma}(x_{13})\lambda^{x_3}_{\rho}(x_1x_2)) +$$

$$+ \lambda^{x_1}_{\nu}(x_3x_2)(g_{\mu\rho}(x_{13})\lambda^{x_3}_{\sigma}(x_1x_2) + g_{\mu\sigma}(x_{13})\lambda^{x_3}_{\rho}(x_1x_2)) - \text{след по}\,(\rho,\sigma),\,(\mu,\nu)] +$$

$$+ a_3(x_{13}^2)^{-2}[g_{\mu\rho}(x_{13})g_{\nu\sigma}(x_{13}) + g_{\nu\rho}(x_{13})g_{\mu\sigma}(x_{13}) - \text{след по}\,(\rho,\sigma),\,(\mu,\nu)]\} \times$$

$$\times\ (x_{13}^2x_{12}^2x_{23}^2)^{-(D-2)/2}. \qquad (5)$$

Тождество Уорда для этой функции получается дифференцированием по координате x_1 выражения в правой части (5). Согласно сказанному выше, найденные таким способом коэффициенты совпадают с коэффициентами перед инициированными полем P^{D-2} аномальными вкладами в другие тождества Уорда. При вычислениях необходимо сначала ввести регуляризацию по размерности поля P^{D-2}:

$$(x_{13}^2x_{23}^2x_{12}^2)^{-(D-2)/2} \to (x_{13}^2)^{-(D-2-l/2)}(x_{12}^2x_{23}^2)^{-l/2},$$

а затем, после вычисления производной, перейти к пределу $l = D-2$. В результате указанной процедуры получим:

$$\partial^{x_1}_{\mu} < \theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)P^{D-2}(x_2) >= -\Big\{\frac{1}{2}(f+1)\partial^{x_1}_{\rho}\partial^{x_1}_{\sigma}\partial^{x_1}_{\nu}\delta(x_{31}) +$$

$$+ \frac{1}{D-2}(f+2)\partial^{x_1}_{\nu}\partial^{x_1}_{\sigma}\delta(x_{31})\partial^{x_3}_{\rho} - \frac{1}{2(D-2)}(Df + (D+2))\partial^{x_1}_{\rho}\partial^{x_1}_{\sigma}\delta(x_{31})\partial^{x_3}_{\nu} -$$

$$- \frac{1}{(D-2)^2}\left(Df + \frac{D^2+2D-2}{D-1}\right)\delta_{\nu\rho}\partial^{x_1}_{\sigma}\delta(x_{31})\,\Box^{x_3} + \frac{1}{2}\,\delta_{\nu\rho}\partial^{x_1}_{\sigma}\,\Box^{x_1}\,\delta(x_{13}) +$$

$$+ \frac{1}{D-2}\,\Box^{x_1}\,\delta(x_{31})\delta_{\nu\rho}\partial^{x_3}_{\sigma} - \frac{D}{2(D-2)}\,\delta_{\nu\rho}\partial^{x_1}_{\sigma}\partial^{x_1}_{\tau}\delta(x_{13})\partial^{x_3}_{\tau} -$$

$$- \frac{D}{2(D-2)(D-1)}\,\partial^{x_1}_{\sigma}\delta(x_{13})\delta_{\nu\rho}\partial^{x_3}_{\nu}\partial^{x_3}_{\rho} + \frac{1}{(D-2)(D-1)}\,\partial^{x_1}_{\nu}\delta(x_{13})\partial^{x_3}_{\rho}\partial^{x_3}_{\sigma} - \frac{D}{2(D-2)(D-1)} \times$$

$$\times\ \partial^{x_1}_{\tau}\delta(x_{13})\delta_{\nu\rho}\partial^{x_1}_{\sigma}\partial^{x_2}_{\tau} + (\rho \leftrightarrow \sigma) - \text{след по}\,(\rho,\sigma)\Big\} < P^{D-2}(x_3)P^{D-2}(x_2) > . \qquad (6)$$

Вернемся к рассмотрению тождества Уорда для функции Грина (1). Помимо найденных выше аномальных вкладов необходимо учесть вклады, связанные с полем φ, а также и дополнительные вклады типа $\partial^{x_1}_{\rho}\delta(x_{13}) < \theta_{\nu\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) >$, связанные с коммутаторами компонент тензора энергии-импульса. Эти вклады также фиксируются условием конформной инвариантности. После всех вычислений и с учетом (6) получим окончательно:

$$\partial_\mu^{x_1} < T(\theta_{\mu\nu}(x_1)\theta_{\rho\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4)) > = -\{\delta(x_{12})\partial_\nu^{x_2} + \delta(x_{14})\partial_\nu^{x_4} -$$

$$-\frac{d}{D}\partial_\nu^{x_1}[\delta(x_{12}) + \delta(x_{14})] + \delta(x_{13})\partial_\nu^{x_3} - a\partial_\nu^{x_1}\delta(x_{13})\} < \theta_{\rho\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) > +$$

$$+\left\{\left[\frac{D}{4}(1-a) + \frac{1}{2}\right]\partial_\rho^{x_1}\delta(x_{13}) < \theta_{\nu\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) > + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{D}{4}(1-a) - \frac{1}{2}\right]\partial_\tau^{x_1}\delta(x_{13})\delta_{\nu\rho} < \theta_{\tau\sigma}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) > + (\rho \leftrightarrow \sigma) - \text{след по}\,(\rho,\sigma)\right\} -$$

$$-\left\{\frac{1}{2}(f+1)\partial_\rho^{x_1}\partial_\sigma^{x_1}\partial_\nu^{x_1}\delta(x_{31}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{D-2}(f+2)\partial_\nu^{x_1}\partial_\sigma^{x_1}\delta(x_{31})\partial_\rho^{x_3} + \ldots\right\} < P^{D-2}(x_3)\varphi(x_2)\varphi(x_4) > . \qquad (7)$$

Итак, мы показали, что тождество Уорда содержит три независимых параметра : a, f и C (нормировка поля P^{D-2}). Значения этих параметров определяют тип полевой модели.

В заключение заметим, что можно найти аномальные вклады и других полей. В частности, при $D = 3$ может существовать аномальный вклад векторного поля с нулевой размерностью.

Один из авторов (В. З.) выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (проект 93-02-15541) за поддержку данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зайкин В. Н., Пальчик М. Я. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5 - 6, 34 (1994).

[2] Fradkin E. S. and Palchik M. Ya., Phys. Rep., **44**, 249 (1978).

[3] Fradkin E. S. and Palchik M. Ya., International Journal of Modern Physics A, **5**, 3463 (1990).

Поступила в редакцию 27 апреля 1994 г.