Краткие сообщения по физике № 5, 6 — 1992 г.

УДК 530.145

О СОСТОЯНИЯХ С КОМПЛЕКСНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

А. С. Бруев

Найдены положения квазиуровней для распадающихся s-состояний в потенциале экспоненциальной ямы.

В данной работе рассмотрены экспоненциально распадающиеся (растущие) s-состояния для сферически-симметричного экспоненциального потенциала $U(r) = -U_0 \exp(-\alpha r)$. В общем случае распадающиеся состояния являются определенными суперпозициями состояний непрерывного спектра, для которых собственные значения гамильтониана оказываются комплексными /1, 2/. При этом комплексным энергиям соответствуют комплексные полюса S-матрицы рассеяния. До настоящего времени хорошо изучен лишь гамовский случай резонансных состояний, для которого ширины квазиуровней много меньше характерного расстояния между ними. Поэтому примеры использования для решения нестационарных задач формализма распадающихся состояний ограничиваются случаем резонансного рассеяния или резонансных ядерных реакций /3/. Как оказалось, распадающиеся состояния для потенциала экспоненциальной ямы не являются резонансными. Отметим, что проведенный в работе расчет комплексных энергий может служить источником важной информации о структуре матрицы рассеяния для экспоненциальных потенциалов, а также представляет интерес в связи с общей теорией распада нестабильных состояний /4/.

Уравнение Шредингера (УШ) для s-состояний в потенциале $U(r) = -U_0\exp(-\alpha r)$ при замене* $z = (2\sqrt{U_0}/\alpha)\exp(-\alpha r/2)$ сводится к уравнению Бесселя. Соответственно для частных решений УШ имеем

$$\chi_{1,2}(r) = J_{\pm 2\sqrt{-E}/\alpha}[(2\sqrt{U_0}/\alpha)\exp(-\alpha r/2)].$$

Рассмотрим решения, удовлетворяющие граничным условиям

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(\infty) \sim \exp(\pm i\sqrt{E}\, r), \tag{1}$$

---

* Используем систему единиц, в которой $2m = \hbar = 1$.

где значения E комплексны. Используя (1) для расчета комплексных собственных значений, получаем уравнение

$$J_{\pm 2\sqrt{-E/\alpha}}(2\sqrt{U_0}/\alpha) = 0. \tag{2}$$

Как видно из (2), определение собственных значений энергии для рассматриваемого потенциала сводится к расчету тех значений индекса функции Бесселя, при которых она обращается в нуль при заданном значении аргумента. Назовем их ν-нулями. Соответственно действительные нули определяют связанные состояния, а комплексные — состояния с комплексными энергиями. В настоящее время подробно изучены лишь действительные ν-нули функции Бесселя /5—7/. Комплексные ν-нули изучались в работах /8, 9/ с применением сложного метода комплексных асимптотик Дебая.

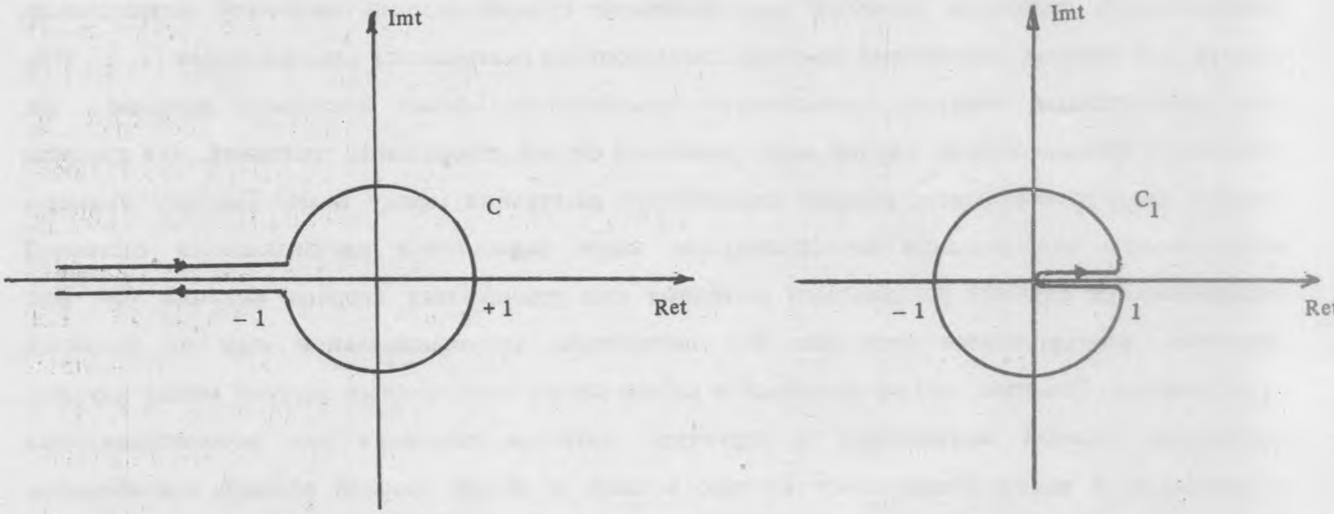

Рис. 1. Контуры интегрирования для интегрального представления $J_\nu(z)$.

В данной работе предложен более простой способ расчета ν-нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$ при $|z| \gg 1$. Воспользуемся представлением функции $J_\nu(z)$ в виде контурного интеграла Сонина /10/

$$J_\nu(z) = (1/2\pi i)\int_c dt\, t^{-\nu-1} \exp[(z/2)(t - 1/t)], \quad \arg z = 0, \tag{3}$$

где контур c изображен на рис. 1. Сделав в интеграле (3) замену переменной $t = \exp(s/z)$, получаем

$$J_\nu(z) = (1/2\pi iz)\int_{c_1} ds \exp\,[z\,\mathrm{sh}(s/z) - \nu s/z], \tag{4}$$

с контуром c_1, также изображенным на рис. 1. Подынтегральную функцию в (4) представим следующим образом

$$\exp\,[z\,\mathrm{sh}(s/z) - \nu s/z] = \exp[(1 - \nu/z)s + s^3/3!z^2]\exp[s^5/5!z^4 + ...]. \qquad (5)$$

Используя (5) при $|z| \gg 1$, находим приближенную формулу

$$J_\nu(z) \simeq (1/z)\,\mathrm{Ai}[2^{1/3}\xi_i z^{2/3}(1 - \nu/z)], \qquad (6)$$

где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри /11/, а постоянная ξ_i может иметь три возможные значения

$$\xi_1 = -1; \;\; \xi_{2,3} = \exp\,(\pm\, i\pi/3). \qquad (7)$$

Отметим, что для случая $\xi_i = \xi_1$ и действительных значений ν и z формула (6) известна как формула Никольсона /12/.

Используя (6) и (7) для ветвей ν-нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$, выходящих из точки $\nu = z$, при $|z| \gg 1$ получаем:

$$\nu^{(+)}_{i,s} = z + \xi_i (z/2)^{1/3}\omega_s, \qquad (8)$$

где $i = 1, 2, 3$, ω_s — s-ый нуль функции Эйри, для которого при $|z^{2/3}(1 - \nu/z)| \gg 1$ можно воспользоваться приближенным соотношением /11/

$$\omega_s \simeq [(3\pi/2)(s - 1/4)]^{2/3},$$

где $s = 1, 2, 3...$.

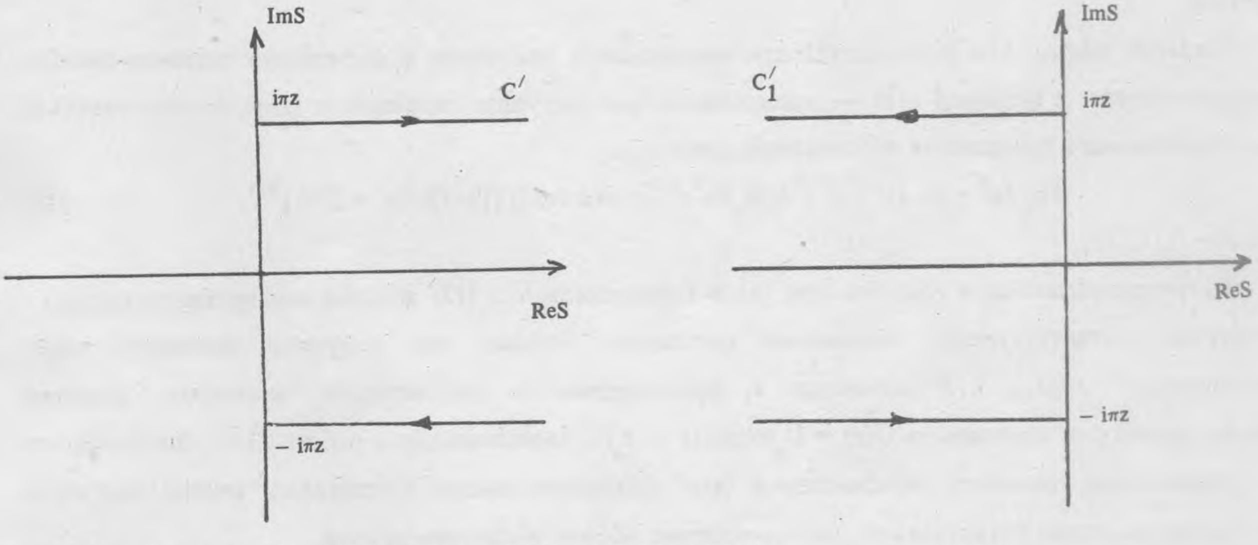

Рис. 2. Контуры интегрирования для интегрального представления $J_\nu(z)$.

Аналогичные формулы для трех ветвей ν-нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$, выходящих из точки $\nu = -z$, можно получить с помощью интегрального представления функции $J_{-\nu}(z)$ /10/

$$J_{-\nu}(z) = \exp(-\nu\pi i)\,(1/2\pi i)\int_{C'} dt\; t^{-\nu-1}\exp\,[(z/2)(t - 1/t)] \quad \arg z = 0, \qquad (9)$$

где контур c' изображен на рис. 2. Сделав в интеграле (9) замену переменной $t = \exp(s/z)$, находим

$$J_{-\nu}(z) = \exp(-\nu\pi i)(1/2\pi iz) \int_{c_1'} ds \exp[z\, \mathrm{sh}(s/z) - \nu s/z],$$

с контуром c_1' также изображенным на рис. 2. Используя (5) при $|z| \gg 1$ имеем

$$J_{-\nu}(z) \simeq z^{-1}\exp(-\nu\pi i)\mathrm{Ai}[2^{1/3}\xi_i z^{2/3}(1 - \nu/z)], \tag{10}$$

где значения ξ_i такие же, как в формуле (7). Для трех ветвей ν-нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$, выходящих из точки $\nu = -z$, при $|z| \gg 1$ с помощью (10) имеем

$$\nu^{(-)}_{i,s} = -[z + \xi_i(z/2)^{1/3}\omega_s], \tag{11}$$

где $i = 1, 2, 3$, ω_s — такое же, как в формуле (8).

Отметим, что формулы (8) и (11) для ν-нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$ полностью согласуются с распределением ν-нулей в комплексной плоскости, изученном в работах /8, 9/. Найденные формулы для ν-нулей при комплексных ξ_i совпадают с аналогичными формулами для комплексных ν-нулей функций Ханкеля $H^{(1,2)}_\nu(z)$, найденных в работе /13/. Это свойство следует из того, что при комплексных значениях ν асимптотики функций Ханкеля совпадают с асимптотикой функции Бесселя.

Отметим также, что формула (8) при комплексных значениях ξ_i определяет экспоненциально распадающиеся, а формула (11) — экспоненциально растущие состояния с комплексной энергией для s-состояний в потенциале экспоненциальной ямы

$$4E_N/\alpha^2 = -4U_0/\alpha^2 + 4(U_0/\alpha^2)^{2/3}\exp(\pm i\pi/3)[(3\pi/2)(N + 3/4)]^{2/3}, \tag{12}$$

где $N = 0, 1, 2, \ldots$

Нетрудно убедиться в том, что при $|z| \gg 1$ приведенные в (12) энергии квазиуровней близки к энергиям соответствующих связанных состояний. Однако мы получили конечное число квазиуровней (два), что находится в противоречии с результатами численных расчетов квазиуровней для потенциала $U(r) = U_0\exp[\alpha(r - r_0)]$, выполненных в работе /14/. Покажем, что с увеличением точности приближения для рассматриваемого потенциала можно получить бесконечную серию квазиуровней, расположенных вблизи истинного уровня.

Для этого рассмотрим решения уравнения Бесселя в форме разложений Мейсселя /15/

$$u_{1,2}(z) = (2\,\mathrm{ctg}\,\beta/\nu\pi)^{1/2}\exp(-P_\nu \pm iQ_\nu),$$

$$P_\nu = \sum_{s=1}^{\infty} \nu^{-2s}P_s(\beta); \quad Q_\nu = \nu(\mathrm{tg}\,\beta - \beta) + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^{-2s+1} q_s(\beta),$$

где $z = \sec\beta$. Известно, что при $\beta \to \pi/2$ разложения Мейсселя переходят в асимптотические разложения функций Ханкеля

$$u_{1,2}(z) \to \exp(\pm i\pi/4) H_{\nu}^{(1,2)}(z),$$

справедливые при $-\pi < \arg z < 2\pi$ и $-2\pi < \arg z < \pi$. Имея это в виду, для функции Бесселя $J_{\nu}(z) = (1/2)[H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)]$ находим

$$J_{\nu}(\nu \sec\beta) = (2\operatorname{ctg}\beta/\nu\pi)^{1/2} \exp(-P_{\nu}) \cos(Q_{\nu} - \pi/4),$$

где $-\pi < \arg\nu < \pi$. Оставив в разложении Q_{ν} первый член, для корней функции $J_{\nu}(z)$ получаем следующее трансцендентное уравнение

$$(z^2 - \nu^2)^{1/2} - \nu\pi/2 + \nu \arcsin(\nu/z) = \pi(N + 3/4), \tag{13}$$

где $N = 0, 1, 2\ldots$. В силу многозначности функции $\arcsin(\nu/z)$, уравнение (13) имеет бесконечное число решений, "начинающихся" в точках $\nu = \pm z$. Приближенные выражения для некоторых из этих решений при $|z| \gg 1$ получаются при использовании разложения

$$\nu = \pm z + c_1^{(\pm)} z^{1/3} + c_2^{(\pm)} z^{-1/3} + \ldots \tag{14}$$

с последующим нахождением коэффициентов $c_s^{(\pm)}$ стандартным методом сравнения членов при одинаковых степенях z. В частности, если в (14) оставить первые два члена, то в результате получаются найденные выше формулы (8) и (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohm A. J. Math. Phys., 22, 2813 (1981).
2. Bohm A., Gadella M., Mainland G. Bruce. Am. J. Phys., 57, 1103 (1989).
3. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971.
4. Fonda L., Ghirardy G. C., Rimini A. Rep. Progr. Phys., 41, 587 (1978).
5. Cohen D. S., J. Math. and Phys., 43, 133 (1964); 44, 410 (1965).
6. Streifer W. J. Math. and Phys., 44, 403 (1965).
7. Conde S., Kalla S. L. Math. Comput., 33, 423 (1979).
8. Макаров Г. И., Осипов А. В. В сб. Проблемы дифракции и распространения волн. Вып. 20, Л., изд. ЛГУ, 1986.
9. Макаров Г. И., Осипов А. В. Вестник ЛГУ, сер. 4, вып. 2, 47 (1987).
10. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М., ГИТТЛ, 1954.
11. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, М., Наука, 1979.
12. Nicholson J. W. Phil. Mag., 16, 271 (1908).
13. Beckmann P., Franz W., Angew Z. Math. Mech., 37, 17 (1957).
14. Atabeck O., Lefebvre R. Nuovo Cimento, 76B, 176 (1983).
15. Watson G. N. Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1945.

Институт общей физики РАН
Поступила в редакцию 23 марта 1992 г.