Краткие сообщения по физике № 4 — 1991 г.

УДК 533.9:530.182

ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

В.Ф. Ковалев, В.В. Пустовалов

С учетом перенормировок величины скорости света в вакууме, элементарных зарядов и масс частиц плазмы найдена точечная непрерывная группа Ли, допускаемая уравнениями холодной электрон-ионной релятивистской плазмы без столкновений. Отмечен один из вариантов ее вычислительных применений в теории нелинейных диэлектрических проницаемостей горячей релятивистской плазмы.

Возможность использования развитого в /1/ подхода для получения сильнонелинейных решений уравнений холодной релятивистской электрон-ионной плазмы с самосогласованным электромагнитным полем существенно зависит от допускаемой этими уравнениями непрерывной точечной группы Ли. Данная работа посвящена групповому анализу таких уравнений

$$\partial n/\partial t + \mathrm{div}\,(n\mathbf{v}) = 0, \quad \partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = (e/m\gamma)\left\{\mathbf{E} - (\mathbf{v}(\mathbf{vE})/c^2) + (1/c)\,[\mathbf{vB}]\right\}, \tag{1}$$

где $\gamma \equiv (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$ — векторы напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей подчиняются уравнениям Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -(1/c)\,\partial\mathbf{B}/\partial t; \ \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho, \ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = (1/c)\,\partial\mathbf{E}/\partial t + (4\pi/c)\,\mathbf{j}, \ \ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

с плотностью тока $\mathbf{j}$ и заряда ρ (e — элементарный заряд частицы плазмы, m — ее масса):

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v}; \ \ \rho = en. \tag{3}$$

В правых частях материальных уравнений (3) подразумевается суммирование по сортам α частиц плазмы ($\alpha = 1, ..., s$) с одним сортом электронов ($\alpha = 1$) и с $s - 1$ сортами ионов. Каждому из этих сортов отвечает, как обычно, своя пара (1) уравнений непрерывности и движения для плотности частиц n и их скорости $\mathbf{v}$ соответственно.

Стандартный групповой анализ /2/ показывает, что система уравнений (1) — (3) допускает непрерывную точечную группу Ли, базис которой составляют одиннадцать инфинитезимальных операторов X_k ($k = 1, ..., 11$); два из них имеют вид:

$$X_1 = \frac{x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\left(B_z\frac{\partial}{\partial E_y} + E_y\frac{\partial}{\partial B_z}\right) - \frac{1}{c}\left(B_y\frac{\partial}{\partial E_z} + E_z\frac{\partial}{\partial B_y}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial v_x} - \frac{v_x}{c^2}\left(v_y\frac{\partial}{\partial v_y} + v_z\frac{\partial}{\partial v_z}\right) + \frac{n v_x}{c^2}\frac{\partial}{\partial n}, \qquad (4)$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} + E_x\frac{\partial}{\partial E_z} - E_z\frac{\partial}{\partial E_x} + B_x\frac{\partial}{\partial B_z} - B_z\frac{\partial}{\partial B_x} + v_x\frac{\partial}{\partial v_z} - v_z\frac{\partial}{\partial v_x}. \qquad (5)$$

Две пары аналогичных операторов X_2, X_3 и X_5, X_6, дополняющие набор (4), (5) до шестипараметрической подгруппы, получаются соответственно из операторов (4) и (5) круговой перестановкой индексов и независимых переменных x, y, z. Помимо этих шести операторов группа включает в себя также оператор растяжения X_7 (см. формулу (10)) и операторы переноса по времени t и трем пространственным координатам

$$X_8 = \partial/\partial t;\ X_9 = \partial/\partial x;\ X_{10} = \partial/\partial y;\ X_{11} = \partial/\partial z. \qquad (6)$$

В операторах X_1 — X_7, так же как и в материальных уравнениях (3), подразумевается суммирование по сортам α частиц плазмы. Для однокомпонентной заряженной электронной плазмы ($s = 1$, $\alpha \equiv e$) базис операторов X_1 — X_{11} совпадает с найденным впервые в работе /3/. Для группового анализа системы уравнений (1), (2) аддитивность вкладов частиц плазмы различных сортов является существенной. Выделение одного сорта частиц плазмы, например, предположение о неподвижности ионов с заданной (неоднородной) плотностью, изменяет симметрию системы и допускаемую ею группу.

Непосредственно из вида операторов (6) следует, что они коммутируют между собой; вместе с оператором X_7 операторы (6) образуют пятипараметрическую подгруппу. Вычисление коммутационных соотношений для операторов X_1 — X_6 показывает, что они образуют шестимерную подалгебру Ли

$$L_6 = \langle X_1, ..., X_6\rangle. \qquad (7)$$

В свою очередь, алгебра (7) разбивается на четыре трехмерных подалгебры:

$$L_3 = \langle X_4, X_5, X_6\rangle;\ L_3 = \langle X_1, X_2, X_5\rangle;\ L_3 = \langle X_1, X_3, X_4\rangle;\ L_3 = \langle X_2, X_3, X_6\rangle. \qquad (8)$$

Первая из алгебр (8), характеризуемая набором операторов X_4, X_5, X_6, описывает трехпараметрическую группу круговых вращений в $3(s + 3)$ плоскостях $s + 3$ трехмерных пространств: координат x, y, z, s векторов скоростей **v** (по числу компонент плазмы) и полей E, B. Второй набор операторов X_1, X_2, X_5 (и два последующих) в алгебрах (8) соответствуют комбинации круговых поворотов в s + 3 плоскостях (оператор X_5) xy, E_xE_y, B_xB_y, v_xv_y (для каждого сорта частиц плазмы) с гиперболическими поворотами (операторы X_1, X_2) в шести плоскостях xt, yt, E_yB_z, E_xB_z; B_xE_z, B_yE_z, проективными преобразованиями скоростей и преобразованиями плотностей. Шестипараметрическая непрерывная точечная группа Ли с базисом операторов (7) представляет собой однородную (трехмерную) группу Лоренца. Неоднородной группе Лоренца (группа Пуанкаре) соответствует десятипараметрическая группа Ли с алгеброй из десяти инфинитезимальных операторов X_1 — X_{11} за исключением оператора растяжений X_7. "Плоские" однородные группы Лоренца характеризуются любой из последних трех алгебр Ли (8). Конечные одномерные преобразования Лоренца можно получить решением уравнений Ли для оператора X_1 (см. (4)).

Учет преобразований входящих в уравнения (1) — (3) параметров (скорости света c, элементарных зарядов e и масс m частиц плазмы) заметно расширяет непрерывную точечную группу Ли, допускаемую этими уравнениями: вместо одного оператора растяжений X_7 появляется s + 3 инфинитезимальных операторов

$$Y_1 = E_x \frac{\partial}{\partial E_x} + E_y \frac{\partial}{\partial E_y} + E_z \frac{\partial}{\partial E_z} + B_x \frac{\partial}{\partial B_x} + B_y \frac{\partial}{\partial B_y} + B_z \frac{\partial}{\partial B_z} + 2m \frac{\partial}{\partial m} + e \frac{\partial}{\partial e},$$

$$Y_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 3m \frac{\partial}{\partial m} + 2e \frac{\partial}{\partial e} - 3n \frac{\partial}{\partial n},$$

$$Y_3 = c \frac{\partial}{\partial c} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + v_x \frac{\partial}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial}{\partial v_y} + v_z \frac{\partial}{\partial v_z} + m \frac{\partial}{\partial m} + 2e \frac{\partial}{\partial e} \times 3n \frac{\partial}{\partial n}, \qquad (9)$$

$$Y_{\alpha+3} = n \frac{\partial}{\partial n} - m \frac{\partial}{\partial m} - e \frac{\partial}{\partial e}, \quad \alpha = 1, \ldots, s.$$

Здесь каждый из операторов $Y_{\alpha+3}$ ($\alpha = 1, \ldots, s$) содержит вклад только от частиц данного сорта α, а в операторах Y_1 — Y_3 по-прежнему подразумевается суммирование по сортам частиц плазмы. Например, в электрон-ионной плазме с одним сортом ионов (с зарядом e_i и массой m_i) операторы Y_2 и $Y_{\alpha+3}$ имеют вид:

$$Y_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 3m\frac{\partial}{\partial m} + 2e\frac{\partial}{\partial e} - 3n\frac{\partial}{\partial n} + $$
$$+3m_i\frac{\partial}{\partial m_i} + 2e_i\frac{\partial}{\partial e_i} - 3n_i\frac{\partial}{\partial n_i},$$

$$Y_4 = n\frac{\partial}{\partial n} - m\frac{\partial}{\partial m} - e\frac{\partial}{\partial e}, \quad Y_5 = n_i\frac{\partial}{\partial n_i} - m_i\frac{\partial}{\partial m_i} - e_i\frac{\partial}{\partial e_i}.$$

Оператор X_7 из указанного выше набора X_1 — X_{11} представляет союбой линейную комбинацию операторов (9), не зависящую от параметров c, e и m:

$$X_7 = Y_2 - Y_1 + \sum_{\alpha+1}^{s} Y_{\alpha+3}. \tag{10}$$

Основным результатом данной работы является обобщение выводов проведенного в /3/ группового анализа на случай многокомпонентной плазмы, а также новые формулы (9) для инфинитезимальных операторов, образующих вместе с (6), (7) базис (s + 13)- параметрической непрерывной точечной группы Ли, допускаемой уравнениями (1) — (3) холодной релятивистской плазмы. Такая (s + 13)- параметрическая непрерывная точечная группа (эквивалентности) не оставляет инвариантными скорость света в вакууме c, элементарные заряды e и массы m частиц плазмы. Этот факт не противоречит хорошо известному положению о релятивистской инвариантности этих величин. На языке предъявленной группы такая релятивистская инвариантность означает инвариантность c, e и m относительно десятипараметрической неоднородной подгруппы Лоренца (группы Пуанкаре) с операторами X_1 — X_{11} (без X_7).

Одним из возможных применений найденной группы в рамках предложенного в /1/ подхода является, в частности, вычисление с ее помощью нелинейной диэлектрической проницаемости горячей релятивистской плазмы из соответствующих "холодных" выражений. Основу такого вычисления составляет линейный закон конечных преобразований существенно нелинейных (по полю) величин плотности тока и заряда (3), непосредственно вытекающий из соответствующих преобразований компонент v_x, v_y, v_z скорости частиц плазмы и их плотности n.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о в а л е в В. Ф., П у с т о в а л о в В. В. Препринт ФИАН № 78, М., 1987; Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 41 (1989); ТМФ, **81**, 69 (1989).
2. И б р а г и м о в Н. Х. Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
3. С ы р о в о й В. А. ЖПМТФ, № 1, 3 (1964).

Поступила в редакцию 12 февраля 1991 г.