

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В. В. Северьянов

*Выполнен анализ характеристического уравнения для непотенциальных волн, распространяющихся в гладком цилиндрическом волноводе конечной длины при наличии однородного по сечению релятивистского пучка электронов. Установлено существование волн с комплексными значениями продольного волнового числа, амплитуды которых нарастают во времени. Получены точные аналитические решения уравнения в параметрической форме.*

При линейном анализе устойчивости пучковых систем, ограниченных не только в поперечном, но и в продольном направлении, вначале решают характеристическое уравнение, а затем найденные из него продольные волновые числа для волн одной и той же частоты подставляют в дисперсионное уравнение, вытекающее из наложенных на систему граничных условий /1/. Характер решений последнего позволяет сделать заключение об устойчивости системы.

Попытки реализовать данную программу показали, что приближенные аналитические решения характеристического уравнения могут приводить к ошибочным результатам из-за высокой чувствительности функций, входящих в дисперсионное уравнение, к значениям подставляемых в него продольных волновых чисел. Нужен более тонкий инструмент исследования. Им, на наш взгляд, может служить параметрическое представление корней характеристического уравнения, эффективность которого можно продемонстрировать на примере простейшей пучковой системы.

Пусть однородный по сечению холодный релятивистский пучок электронов, пространственный заряд которого скомпенсирован неподвижными ионами, распространяется в гладком металлическом волноводе цилиндрического сечения и стабилизирован бесконечно сильным продольным магнитным полем. Характеристическое уравнение для  $s$ -й моды непотенциальных волн в такой системе имеет вид /2/:

$$k_{\perp s}^2 + (k_z^2 - \omega^2/c^2) [1 - \omega_b^2 \gamma^{-3} / (\omega - k_z u)^2] = 0. \quad (1)$$

Здесь  $k_{\perp s} = \mu_s/R$ ;  $\mu_s$  — корни функции Бесселя:  $J_0(\mu_s) = 0$ ;  $k_z$  — продольное волновое число;  $\omega_b = (4\pi e^2 n_b/m)^{1/2}$  — ленгмюровская частота электронов пучка;  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ;  $u$  — невозмущенная скорость электронов.

Полный и строгий анализ уравнения (1) значительно облегчает представление

$$k_z = \omega/\varphi, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — комплексный параметр, совпадающий при вещественных  $\omega$  и  $k_z$  с фазовой скоростью волны. При этом из уравнения (1) следует:

$$\omega_s^2 \equiv \omega^2/k_{\perp s}^2 u^2 = \alpha_s^2/(1 - u/\varphi)^2 + 1/(u^2/c^2 - u^2/\varphi^2), \quad (3)$$

где  $\alpha_s^2 = \omega_b^2 \gamma^{-3} / k_{\perp s}^2 u^2$ .

Характеристическое уравнение не налагает на значения параметра  $\varphi$  никаких ограничений. В продольно неограниченной системе они возникают из условий на бесконечности ( $k_z$  должны быть вещественными), а в системе конечной длины квантование  $\varphi$  осуществляется дисперсионным уравнением.

Выясним, какие значения  $k_z$  соответствуют устойчивым решениям (вещественным  $\omega$ ). На рис. 1 представлен график функции  $\omega^2(u/\varphi)$ , построенный по формуле (3) без соблюдения масштаба для случая  $\alpha_s^2 < 1$ , когда невозмущенный ток пучка меньше тока Пирса. Из рисунка видно, что каждой частоте  $\omega > \omega_2$  соответствуют четыре вещественных значения  $\varphi$  и, следовательно, четыре вещественных значения  $k_z$ . Частотам из области  $0 < \omega < \omega_2$  соответствуют по два вещественных и два комплексных значения  $k_z$ . Аналогично, мнимым частотам, у которых  $0 < |\omega| < |\omega_3|$ , соответствуют четыре мнимых  $k_z$ , а частотам с  $|\omega| > |\omega_3|$  — по два мнимых и два комплексных значения  $k_z$ .

В области частот  $\omega_2 < \omega < \omega_1 = (k_{\perp s}^2 c^2 + \omega_b^2 \gamma^{-3})^{1/2}$  две волны распространяются в сторону движения пучка и две — навстречу ему. Таким образом, пучок изменяет на противоположное направление фазовой скорости одной из электромагнитных волн.

Рассмотрим комплексную плоскость параметра  $u/\varphi$ . Полагая  $u/\varphi = a + ib$  и  $\omega_s = \Omega + i\delta$ , перепишем формулы (2), (3) в виде:

$$k_z/k_{\perp s} = (\Omega a - \delta b) + i(\Omega b + \delta a), \quad (4)$$

$$\Omega^2 - \delta^2 = \frac{\alpha_s^2 [(1 - a)^2 - b^2]}{[(1 - a)^2 + b^2]^2} + \frac{u^2/c^2 - a^2 + b^2}{(u^2/c^2 - a^2 + b^2)^2 + 4a^2 b^2} \equiv \Phi(a, b^2), \quad (5)$$

$$\Omega \delta = \frac{\alpha_s^2 (1 - a) b}{[(1 - a)^2 + b^2]^2} + \frac{ab}{(u^2/c^2 - a^2 + b^2)^2 + 4a^2 b^2} \equiv b\Psi(a, b^2). \quad (6)$$

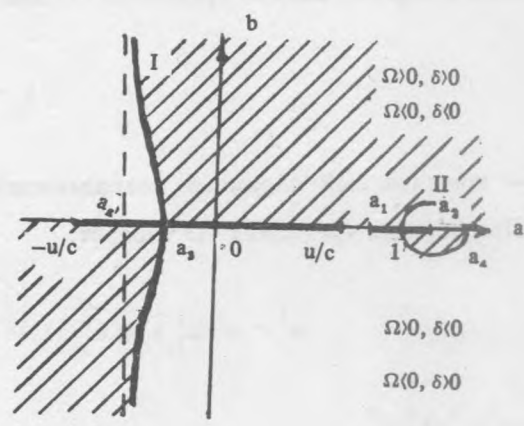
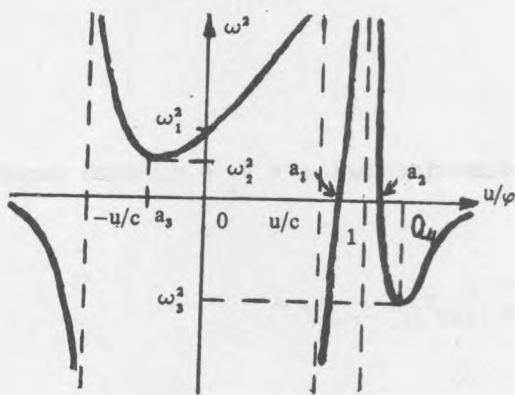


Рис. 1. Зависимость частоты от значений вещественного параметра  $u/\varphi$ .

Рис. 2. Комплексная плоскость параметра  $u/\varphi$ . Жирные линии соответствуют стационарным волнам ( $\text{Im } \omega = 0$ ), заштрихованные области — волнам с нарастающей амплитудой.

Результат анализа формул (5) и (6) представлен на рис. 2, который также выполнен без соблюдения масштаба. Из них следует, что вещественным частотам ( $\delta = 0$ ) соответствуют два участка вещественной оси, на которых  $b = 0, \Phi \geq 0$ , а именно,  $-u/c \leq a \leq u/c$ , где  $\omega_2 \leq \omega < \infty$ ,

$$a_1 = 1 - \frac{\gamma^{-2}}{1 + (u^2/c^2 + \alpha_s^{-2} \gamma^{-2})^{1/2}} \leq a \leq 1 + \frac{\alpha_s^2}{1 - \alpha_s^2} [1 + (u^2/c^2 + \alpha_s^{-2} \gamma^{-2})^{1/2}] = a_2,$$

где  $0 \leq \omega < \infty$ . Контур I, изображенный жирной линией, описывается уравнением, вытекающим из требований  $\Psi = 0, \Phi = 0$  и имеет вид:

$$b^2 = \frac{(a-1) [a + \alpha_s^2 u^2/c^2 - a^2 (1 - \alpha_s^2)] + \sqrt{\alpha_s^2 a (a-1) [4a (a-1) (\alpha_s^2 u^2/c^2 + \gamma^{-2}) + \gamma^{-4}]}{a (1 - \alpha_s^2) + \alpha_s^2} \quad (7)$$

при  $-\alpha_s^2 / (1 - \alpha_s^2) = a_3 \leq a \leq a_4$ . На этом контуре частота изменяется в пределах от 0 до  $\omega_2$ .

Мнимые частоты расположены на остальной части вещественной оси и на контуре II, уравнение которого также описывается формулой (7), но при значениях  $1 \leq a \leq a_4$ . Ему соответствует область частот  $|\omega_3| \leq |\omega| < \infty$ .

Использованные выше числа  $a_3$  и  $a_4$  являются вещественными решениями уравнения  $\Psi(a, 0) = 0$ , т.е.

$$\alpha_s^2 = a(a-1)^3 / (u^2/c^2 - a^2)^2.$$

В случае  $\alpha_s^2 \ll 1$  из этой формулы следует:  $a_3 \approx -\alpha_s^2 (u/c)^4 [1 - 3\alpha_s^2 (u/c)^4]$ ,  $a_4 \approx 1 + 2\alpha_s^2 + \sqrt{4\alpha_s^2 (\alpha_s^2 + \gamma^{-2})}$ , если справедливо неравенство  $8\alpha_s^2 \gamma^2 \gg 1$  или  $a_4 \approx 1 + (\alpha_s^2 \gamma^{-4})^{1/3} [1 + (4/3)(\alpha_s^2 \gamma^2)^{1/3}]$  в противоположном пределе. Частота  $\omega_2$  приближенно равна

$$\omega_2 \approx (k_{\perp s}^2 c^2 + \omega_b^2 \gamma^{-3} - \omega_b^4 \gamma^{-6} u^2 / k_{\perp s}^2 c^4)^{1/2}.$$

Особый интерес представляют заштрихованные на рис. 2 области комплексной плоскости, в которых произведение  $b\Psi$  положительно. В них, согласно формуле (6), реальная и мнимая части комплексной частоты имеют одинаковые знаки. Следовательно, при положительной реальной части частоты амплитуда волны должна нарастать во времени. В незаштрихованных областях то же будет происходить с волнами, реальная часть частоты которых отрицательна. Это указывает на принципиальную возможность генерации пучком электромагнитных волн в широком диапазоне частот. Так например, в результате численного решения дисперсионного уравнения установлено, что в резонаторе с идеально отражающими стенками энергия электромагнитного поля может нарастать за счет убыли кинетической энергии релятивистского пучка электронов.

С помощью формул (4)—(6) можно строго доказать, что комплексные значения частоты возможны только при комплексных  $k_z$  (объем статьи не позволяет привести это доказательство). Учитывая известную теорему анализа о возможности разложения функции, определенной на ограниченном участке числовой оси, в тригонометрический ряд Фурье, можно утверждать, что упомянутая неустойчивость пучка обусловлена его взаимодействием с пространственно-временными волновыми пакетами.

Для записи всех решений характеристического уравнения (т.е. четырех функций  $k_z(\omega)$ ) более удобна иная параметризация. Положим сумму двух корней уравнения (1) равной  $k_{z1} + k_{z2} = (\omega/u)(1 + \sqrt{\epsilon})$ , где  $\epsilon$  — комплексный параметр. Тогда сумма двух других корней, а также произведения каждой пары корней выражаются через  $\omega$  и  $\epsilon$ , что позволяет выразить через эти величины и сами корни. При этом для  $\omega(\epsilon)$  получается биквадратное уравнение. Перечисленные операции приводят к точным решениям характеристического уравнения, которые определены на всей плоскости комплексного параметра  $\epsilon$  и справедливы при произвольных значениях входящих в это уравнение коэффициентов:



$$\omega_s^2 = \frac{(1+\alpha_s^2)u^2/c^2 - (1-\alpha_s^2)\epsilon \pm \sqrt{4\alpha_s^2\gamma^{-2}\epsilon[1+\alpha_s^2\gamma^2u^2/c^2 + \gamma^{-2}(\epsilon-1)^{-1}]}}{(\epsilon - u^2/c^2)^2}, \quad (9)$$

$$\frac{k_z}{k_{\perp s}} = \frac{\omega_s}{2} (1 \pm \sqrt{\epsilon}) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \omega_s^2 \left( \frac{u^2}{c^2} + \frac{1-\epsilon}{2} \right) - (1-\alpha_s^2) \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( 1+\alpha_s^2 - \omega_s^2 \frac{u^2}{c^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

В последней формуле из трех двойных знаков  $\pm$  первый и третий должны принимать только совпадающие значения.

Чтобы выделить все решения с вещественными значениями частоты  $0 \leq \omega < \infty$ , достаточно в формуле (9) взять только верхний знак и использовать вещественные значения  $\epsilon$  из интервала  $1 \leq \epsilon \leq (1 + 2\alpha_s^2/(1 - \alpha_s^2))^2$  при  $\alpha_s^2 < 1$ . Мнимым частотам  $0 \leq |\omega| < \infty$  соответствует нижний знак и интервал  $1 \leq \epsilon < \infty$ . Легко видеть, что формула (9) допускает сколь угодно большие значения инкремента.

Дисперсионное уравнение, квантующее  $\epsilon$ , а следовательно и  $\omega$ ,  $k_z$ , может быть аккуратно решено только с помощью ЭВМ. Формулы (9), (10) позволяют осуществить полное исследование устойчивости системы в линейном приближении. Использованный в данной работе прием оказывается успешным и при анализе пучково-плазменной системы в пренебрежении обратным током. В работе /3/ с его помощью была получена точная формула для инкремента потенциальных волн во всей области неустойчивости.

Автор благодарен А. А. Рухадзе за интерес к работе и полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Богданкевич Л. С., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. УФН, 133, 3 (1981).
2. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М., Высшая школа, 1988.
3. Северьянов В. В. В сб. Математическое моделирование в физико-технических задачах. Тула, Приокское кн. изд., 1989.