УДК 539

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

С. А. Маслов[1,2], С. А. Тригер[1,3], Н. Г. Гусейн-заде[3]

Исследована низкочастотная асимптотика спектральной плотности распределения равновесного излучения в бесстолкновительной невырожденной электронной плазме. Показано, что учет пространственной дисперсии в диэлектрической проницаемости электронного газа приводит к логарифмической особенности в спектральной плотности распределения при малых частотах. При этом полная энергия излучения остается конечной. Результаты аналитического рассмотрения совпадают с численным расчетом.

Ключевые слова: спектральная плотность распределения излучения, диэлектрическая проницаемость.

Как известно, спектральное распределение энергии равновесного излучения, установленное М. Планком [1], привело к становлению квантовой теории. Распределение Планка соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела, рассматриваемой как полость, заполненная излучением и ограниченная абсолютно поглощающим веществом. При этом предполагается, что излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом, хотя эффекты взаимодействия фотонов с ограничивающим веществом не рассматриваются [2]. Практическая реализация распределения Планка, как правило, связана с рассмотрением макроскопического тела, находящегося в тепловом равновесии с окружающим его "черным" излучением [2]. В решении этой задачи, имеющей непосредственное отношение к закону Кирхгофа, достигнуты большие успехи

[1] ОИВТ РАН, 125412 Россия, Москва, ул. Ижорская, 13; e-mail: satron@mail.ru.
[2] МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Россия, Москва, ул. Ленинские горы, 1.
[3] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38.

(см. подробнее [3–5] и цитированную там литературу). В то же время, вопросу о спектральном распределении энергии излучения в самом веществе, находящемся в состоянии равновесия, уделялось мало внимания (см. [6] и цитированную там литературу). Решение этой задачи в основном ограничивалось анализом областей прозрачности при малых импульсах фотонов. Такой подход представляется заведомо ограниченным, так как из физических соображений ясно, что для установления термодинамического равновесия излучения в веществе необходимо учитывать эффекты поглощения излучения. Последовательному рассмотрению вопроса о влиянии поглощающей плазменной среды на спектральное распределение энергии равновесного излучения в веществе посвящены недавние статьи [7–9]. В этих работах рассмотрение проводилось как для полностью равновесной системы нерелятивистских заряженных частиц и фотонов [7, 8], так и на основе обобщения более традиционного подхода, использующего флуктуационно-диссипационную теорему [9]. Ниже, при вычислении асимптотического поведения спектральной плотности излучения, мы будем базироваться на результатах работ [7, 8].

Спектральная плотность распределения энергии равновесного излучения при наличии электронного газа в предположении α, Γ, $\eta << 1$ вычисляется как

$$F(W) = \frac{W^3}{\exp(W) - 1} +$$

$$+W^3 \coth\left(\frac{W}{2}\right)\left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}W^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\Psi(Y,W)\cdot Y^4 dY}{(\alpha\Phi(Y,W) - 2Y^2)^2 + (\alpha\Psi(Y,W))^2} - \frac{1}{2}\right], \tag{1}$$

где $\Gamma = e^2 n^{1/3}/T$ – параметр кулоновского взаимодействия электронов, e, n, T – заряд, концентрация и температура электронов соответственно, $\eta = n\Lambda^3$, а $\Lambda = \hbar\sqrt{2\pi/mT}$ – длина волны де Бройля. Параметр α определяется выражением $\alpha = (\mathrm{Ry}\cdot\eta^{2/3})/(\pi mc^2\Gamma^2)$, где m – масса электрона, c – скорость света, Ry – постоянная Ридберга.

Первый член в (1) отвечает спектральной плотности Планковского излучения, а второй член описывает влияние заряженных частиц на спектральную плотность, выражающуюся через поперечную диэлектрическую проницаемость. Функции $\Phi(Y,W) = W^2\mathrm{Re}\varepsilon^{tr}(Y,W)$ и $\Psi(Y,W) = W^2\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(Y,W)$ в безразмерных переменных $Y = k\Lambda/\sqrt{4\pi}$, $W = \hbar\omega/T$, (k, ω – соответственно волновое число и частота) определяются формулами [8]

$$\Phi(Y,W) = W^2 - 2\Gamma\eta^{2/3} - \Gamma\eta^{2/3}\left(\frac{W}{Y^2} + \frac{Y^2}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{{}_1G_1\left[1, \frac{3}{2}, -\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right)^2\right] - {}_1G_1\left[1, \frac{3}{2}, -\left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right)^2\right]\right\} +$$

$$+\Gamma\eta^{2/3}\left(1+\frac{Y^2}{2}\right)\left\{{}_1G_1\left[1,\frac{3}{2},-\left(\frac{W}{2Y}-\frac{Y}{2}\right)^2\right]+{}_1G_1\left[1,\frac{3}{2},-\left(\frac{W}{2Y}+\frac{Y}{2}\right)^2\right]\right\}, \quad (2)$$

$$\Psi(Y,W)=\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\left(\frac{1}{Y}+\frac{Y}{2\pi}\right)\left\{\exp\left[-\left(\frac{W}{2Y}-\frac{Y}{2}\right)^2\right]-\exp\left[-\left(\frac{W}{2Y}+\frac{Y}{2}\right)^2\right]\right\}, \quad (3)$$

где ${}_1G_1(1,3/2,-x^2)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [10]. Исследуем поведение спектральной функции распределения энергии при частоте $W\to 0$ в предположении $\sqrt{W} << \alpha\Gamma\eta^{2/3} << 1$. Из (1) видно, что

$$F(W)\cong\int_0^{+\infty} f(Y,W)dY+O(W^3),$$

$$f(Y,W)=\frac{8\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}W}\frac{\Psi(Y,W)\cdot Y^4dY}{(\alpha\Phi(Y,W)-2Y^2)^2+(\alpha\Psi(Y,W))^2}. \quad (4)$$

Символ $\cong$ здесь и в дальнейшем означает асимптотику. Асимптотика $\Psi(Y,W)$ при $W\to\ 0$ имеет вид

$$\Psi(Y,W)\cong\begin{cases}\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot W/Y\cdot\exp(-W^2/4Y^2), & Y<<\sqrt{W}\\ \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot W/Y, & Y\sim\sqrt{W}\\ \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}(1/Y+Y/2\pi)\cdot W\exp(-Y^2/4), & Y>>\sqrt{W}\end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение $f(Y,W)$ при различных Y.

1. $Y << W$. В этом случае $W/2Y\pm Y/2\to\infty$. Из асимптотики ${}_1G_1(1,3/2,-x^2)\cong 1/2x^2$, $x\to+\infty$ следует $\alpha\Phi(Y,W)-2Y^2\cong-2\alpha\Gamma\eta^{2/3}>>\Psi(Y,W)$, откуда

$$f(Y,W)\cong\frac{8\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot Y^3\exp(-W^2/4Y^2)}{(-2\alpha\Gamma\eta^{2/3})^2}<<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\alpha}}\cdot\frac{\Gamma\eta^{2/3}\cdot Y^3}{(\alpha\Gamma\eta^{2/3})^2}. \quad (6)$$

2. $Y\sim W$ или $W<<Y\leq\sqrt{W}$. Из (4)–(5) находим верхнюю оценку $f(Y,W)$:

$$f(Y,W)\leq\frac{8\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}W}\cdot\frac{\Psi(Y,W)\cdot Y^4}{(\alpha\Psi(Y,W))^2}\leq\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\alpha}}\frac{\Gamma\eta^{2/3}Y^5}{(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}W)^2}\exp\left(\frac{W^2}{4Y^2}\right)<<$$

$$<<\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\alpha}}\cdot\frac{\Gamma\eta^{2/3}Y}{(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3})^2}. \quad (7)$$

3. $\sqrt{W}\leq Y<<1$. В силу того, что ${}_1G_1(1,3/2,-x^2)\cong 1-2x^2/3$, $x\to 0$, выражение $\alpha\Phi(Y,W)-2Y^2\cong 2\alpha\Gamma\eta^{2/3}Y^2/3-2Y^2\cong-2Y^2$, следовательно,

$$f(Y,W)\cong\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3\alpha}}\cdot\frac{\Gamma\eta^{2/3}\cdot Y^3(2\pi+Y^2)\exp(-Y^2/4)}{4Y^4+(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}(1/Y+Y/2\pi)\cdot W\exp(-Y^2/4))^2}. \quad (8)$$

При $\sqrt[3]{W} << Y << 1$ справедливо $2Y^2 >> \Psi(Y,W)$ и формулу (8) можно упростить:

$$f(Y,W) \cong \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{Y\sqrt{\pi^3\alpha}} \cdot (2\pi + Y^2)\exp\left(-\frac{Y^2}{4}\right). \tag{9}$$

4. $Y \sim 1$ или $Y >> 1$. Поскольку ${}_1G_1(1,3/2,-x^2) \le 1$ при всех x, для $\Phi(Y,W)$ из формулы (2) справедлива следующая оценка:

$$|\Phi(Y,W)| \le W^2 + 2\Gamma\eta^{2/3} + 2\Gamma\eta^{2/3}\left(\frac{W}{Y^2} + Y^2 + 1\right) \cong 2\Gamma\eta^{2/3}Y^2 << 2Y^2, \tag{10}$$

откуда $|\alpha\Phi(Y,W) - 2Y^2| \cong 2Y^2 >> \Psi(Y,W)$, и $f(Y,W)$ удовлетворяет (9).

С целью дальнейшего исследования асимптотики (1) разложим интеграл в формуле (4) в следующую сумму:

$$\int\limits_0^{\infty} f(Y,W)dY = \int\limits_0^{\sqrt{W}} f(Y,W)dY + \int\limits_{\sqrt{W}}^{\sqrt[4]{W}} f(Y,W)dY + \int\limits_{\sqrt[4]{W}}^{+\infty} f(Y,W)dY. \tag{11}$$

Здесь учтено, что $\sqrt[4]{W} >> \sqrt[3]{W}$. Из (7)–(11) следует, что

$$\int\limits_0^{\sqrt{W}} f(Y,W)dY \le \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\alpha}} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{W}} \frac{\Gamma\eta^{2/3}Y}{(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3})^2} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\alpha}} \cdot \frac{\Gamma\eta^{2/3}W}{(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3})^2}, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\sqrt{W}}^{\sqrt[4]{W}} f(Y,W)dY \cong \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3\alpha}} \cdot \int\limits_{\sqrt{W}}^{\sqrt[4]{W}} \frac{\Gamma\eta^{2/3}\cdot Y^3(2\pi + Y^2)\exp(-Y^2/4)dY}{4Y^4 + (\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}(1/Y + Y/2\pi)\cdot W\exp(-Y^2/4))^2} \cong$$

$$\cong \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\alpha}} \cdot \int\limits_{\sqrt{W}}^{\sqrt[4]{W}} \frac{\Gamma\eta^{2/3}\cdot Y^5 dY}{4Y^6 + (\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot W)^2} \cong$$

$$\cong \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{3\sqrt{\pi\alpha}}\left[\ln(4W^2) - 2\ln(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot W)\right] >> \int\limits_0^{\sqrt{W}} f(Y,W)dY, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\sqrt[4]{W}}^{\infty} f(Y,W)dY \cong \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{\sqrt{\pi^3\alpha}} \int\limits_{\sqrt[4]{W}}^{\infty} \frac{(2\pi + Y^2)}{Y}\exp\left(-\frac{Y^2}{4}\right)dY =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{\sqrt{\pi\alpha}}\left[\int\limits_{\sqrt{W}/4}^{\infty} \frac{e^{-Z}dZ}{Z} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sqrt{W}/4}^{\infty} e^{-Z}dZ\right] \cong$$

$$\cong \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\gamma - \ln\frac{\sqrt{W}}{4} + \frac{2}{\pi}e^{-\sqrt{W}/4}\right) \cong$$

$$\cong \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\gamma - \ln\frac{\sqrt{W}}{4} + \frac{2}{\pi}\right) >> \int\limits_0^{\sqrt{W}} f(Y,W)dY, \qquad (14)$$

где $Z = Y^2/4$, $\gamma = 0.5772156649\ldots$ – постоянная Эйлера. Из (4), (11)–(14), следует, что

$$F(W) \cong \frac{\sqrt{2}\Gamma\eta^{2/3}}{3\sqrt{\pi\alpha}}\left[4\ln 4 + 3\gamma + \frac{6}{\pi} - 2\ln\left(\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot W\right)\right]. \qquad (15)$$

На рис. 1 для примера представлены сравнительные графики спектральной функции распределения (1) и ее асимптотики (15) при $\Gamma = 0.01$, $\eta = 0.1$. В этом случае произведение $\alpha\Gamma\eta^{2/3} \approx 5.826871\cdot 10^{-5} << 1$ и при $W << (\alpha\Gamma\eta^{2/3})^2 \approx 3.395243\cdot 10^{-9}$ асимптотика спектральной функции удовлетворяет (15).

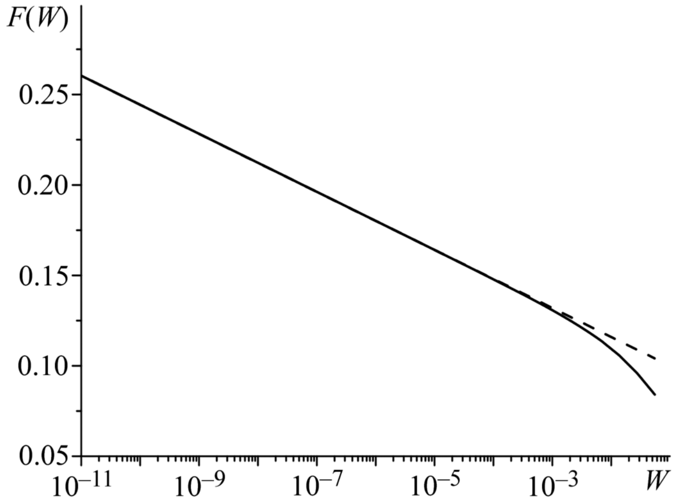

Рис. 1: *Графики функции $F(W)$ (сплошная линия) и ее асимптотического поведения найденного аналитически (штриховая линия) при* $\Gamma = 0.01$, $\eta = 0.1$. *По горизонтальной оси масштаб логарифмический, по вертикальной – линейный.*

Таким образом, влияние плазменной среды принципиально меняет поведение спектральной плотности излучения на малых частотах. Отметим, что наличие логарифмического роста спектральной плотности излучения при малых частотах не приводит к расходимости полной энергии излучения, являющейся интегралом по частоте от спектральной плотности излучения. Результаты работы могут быть применены как для лабораторных условий, так и для астрофизических приложений, включая изучение моделей ранней Вселенной.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-02-00573).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] M. Planck, Ann. der Phys. **1**, 719 (1900); **4**, 553 (1900).
[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, часть 1* (М., Наука, 1976).
[3] М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике* (М., Наука, 1967).
[4] А. И. Волокитин, Б. Н. Дж. Перссон, УФН **177**, 921 (2007).
[5] Е. А. Виноградов, И. А. Дорофеев, УФН **179**, 449 (2009).
[6] S. A. Trigger, Phys. Lett. A **370**, 365 (2007).
[7] В. Б. Бобров, И. М. Соколов, С. А. Тригер, Письма в ЖЭТФ **101**, 326 (2015).
[8] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, Теоретическая и математическая физика **187**, 104 (2016).
[9] А. Г. Загородний, С. А. Тригер, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(5), 45 (2018).
[10] М. Абрамовиц, И. Стиган, Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами (М., Наука, 1979) [M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables (Washington D. C., National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55)].

Поступила в редакцию 27 июня 2018 г.