Краткие сообщения по физике № 2-1990 г.

УДК 533.951

ЗАКОН 3/2 ЧАЙЛДА – ЛЕНГМЮРА И ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

В.Ю. Шафер

По аналогии с принципом Мопертюи – Лагранжа в механике сформулирован принцип экстремального действия применительно к сплошной среде, состоящей из потоков заряженных частиц и индуцируемых ими электромагнитных полей. В электрическом диоде с заданным напряжением на электродах максимальному действию отвечает режим стационарного разряда с максимальным током (минимальным импедансом); минимальному действию отвечает состояние диода с током, равным нулю.

Величина тока электрического диода в стационарном режиме разряда при заданном напряжении на электродах определяется из решения уравнения Пуассона с соответствующими граничными условиями и при двух дополнительных условиях, являющихся следствием стационарности: закона сохранения энергии для каждого электрона пучка и закона сохранения заряда $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ ($\mathbf{j}$ – плотность тока). Этими законами сохранения решение не определяется однозначно. Для выделения единственного решения обычно привлекают еще одно условие – ограничение тока пространственным зарядом (ОТПЗ) – равенство нулю нормальной составляющей электрического поля на катоде.* Последнее условие кажется очевидным. Величина тока, полученная с его применением, подтверждается экспериментально в тех простейших случаях, когда экспериментальная ситуация адекватна модели и ток можно измерить достаточно точно. Однако с теоретической точки зрения это условие не является формально обоснованным: оно не следует ни из уравнений Максвелла (как граничное), ни из условия стационарности, ни из каких-либо первых физических принципов.

В данной работе для определения "предпочтительного" режима стационарного разряда диода предлагается исходить из принципа экстремального действия, сформулированного применительно к сплошной среде по аналогии (но не адекватно) с известным в механике и геометрической оптике принципом наименьшего действия Мопертюи – Лагранжа (МЛ). Для наглядности изложение ведется на простейшем примере плоского нерелятивистского диода.

Диод состоит из двух неограниченных плоскостей, перпендикулярных оси x и пересекающих ее в точках $x = 0$ (катод) и $x = l$ (анод). Потенциалы анода и катода заданы и постоянны: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(l) = \Phi_0 > 0$; эмиссионная способность катода не ограничена; $V(0) = 0$ ($V(x)$ – скорость электронов). В стационарном режиме диод описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} \Phi''(x) = 4\pi e N(x), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(l) = \Phi_0; \\ mV^2(x)/2 - e\Phi(x) = 0; \quad j = eN(x)V(x) = \text{const}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $e > 0$, m, $N(x)$ – заряд, масса и плотность числа электронов; штрих означает дифференцирование по x.

Исключением переменных $N(x)$, $V(x)$ система (1) сводится к одному уравнению

$$4\pi (m/2e)^{1/2} j \equiv J = \Phi^{1/2}(x)\Phi''(x) = \text{const}, \tag{2}$$

---

* Для определенности ограничимся рассмотрением электронного диода с бесконечной эмиссионной способностью катода и предположим, что электроны стартуют с катода с нулевой скоростью. Эти ограничения не принципиальны.

первый интеграл которого имеет вид

$$[\Phi'(x)]^2 = 4J\Phi^{1/2}(x) + C, \quad 0 \leqslant C = E^2(0) \leqslant (\Phi_0/l)^2, \tag{3}$$

где в качестве параметра C фигурирует значение квадрата электрического поля на катоде. Общее решение уравнения (2) есть однопараметрическое семейство кривых $\Phi(x, C)$, которое неявно задается уравнением

$$12J^2 x = (4J\Phi^{1/2} + C)^{3/2} - 3C(4J\Phi^{1/2} + C)^{1/2} + 2C^{3/2}. \tag{4}$$

Ток J как функция от C определяется подстановкой в (4) граничного условия $\Phi(l) = \Phi_0$. При C = 0 (условие ОТПЗ) значение тока равно: $J(0) = J_{CL} = (4/9)\Phi_0^{3/2}/l^2$ (формула Чайлда – Ленгмюра /1/), при $C = (\Phi_0/l)^2$ ток равен нулю. Общее выражение для J(C) удобно написать в безразмерных переменных $i \equiv J/(\Phi_0^{3/2}/l^2)$, $c \equiv C/(\Phi_0/l)^2$:

$$\begin{aligned} i &= (2/9)\,[1 + (1 - (3/2)c^{1/2})(1 + 3c^{1/2})^{1/2}], \\ di/dc &= -\,(3/4)(1 + 3c^{1/2})^{-1/2} < 0, \quad 0 \leqslant c \leqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) видно, что i(c) – монотонно убывающая функция, принимающая максимальное $i(0) = i_{CL}$ и минимальное $i(1) = 0$ значения на границах области существования c, причем di/dc нигде не обращается в нуль. Все значения c из интервала [0, 1] равноправны, ни одно из них не выделено постановкой задачи (1). Какой же режим "выбирает" диод?

Для решения этого вопроса обратимся к принципу минимального действия, предложенному впервые П.Л. Мопертюи (1744) и в более общем виде сформулированному Ж.Л. Лагранжем (1788) /2/. Согласно этому принципу реализуется такое состояние движения произвольной системы взаимодействующих "тел" (изолированной или находящейся в поле "неподвижных внешних центров"), в котором величина действия

$$S = \sum_n \int \mathbf{p}_n d\mathbf{r}_n = \int \Big(\sum_n \mathbf{p}_n \mathbf{v}_n\Big) dt \tag{6}$$

максимальна или минимальна. Здесь $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{v}_n$ – импульс и скорость n-й частицы, суммирование проводится по всем частицам системы, а интегралы берутся вдоль траекторий частиц.

В классической формулировке принцип МЛ к данной ситуации неприменим, так как он допускает лишь такие состояния движения системы, которым соответствует одно и то же значение полной энергии системы. При этом подразумевается, что число частиц во всех состояниях тоже одинаковое. Конечным результатом применения принципа является определение уравнений для "истинных" траекторий частиц.

В данной задаче уравнения для частиц и поля считаются известными, а сравниваются состояния с разным числом электронов в диоде и соответственно – с разной полной энергией. Инвариантным в стационарном режиме является лишь значение энергии каждого отдельного электрона. Поэтому из принципа МЛ возьмем только определение действия (6), обобщив его на сплошную среду, и постулируем утверждение, что в реализуемом режиме работы диода действие максимально или минимально.

В силу стационарности исследуемых состояний действие пропорционально времени t, поэтому далее исследуем величину $S_t = dS/dt$, которая от времени не зависит. Для перехода к сплошной среде величину $\mathbf{p}_n\mathbf{v}_n$ (имеющую смысл потока импульса частицы вдоль ее траектории) заменим на след тензора напряжений среды $\sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{r})$ (по α подразумевается суммирование), а сумму по частицам заменим интегрированием по объему диода. Тензор напряжений в диоде есть сумма двух слагаемых, отвечающих вкладу поля пучка; полевая часть равна $\sigma_{\alpha\alpha}^{f} = (E^2 + B^2)/8\pi$ – след максвелловского тензора напряжений, вклад пучка $\sigma_{\alpha\alpha}^{b} = mNV^2$.

Таким образом, в данном случае действие равно:

$$S_t = \int_0^l [mN(x)V^2(x) + E^2(x)/8\pi]\,dx = (1/8\pi)\int_0^l (4\Phi(x)\Phi''(x) + [\Phi'(x)]^2)\,dx. \tag{7}$$

Подставляя в (7) общее решение (4), получим:

$$5\pi(l/\Phi_0^2)S_t \equiv s = (2/3)\,[1 + (1 + 3c^{1/2})^{1/2}] - c^{1/2} - (3/8)c,$$

$$ds/dc = -(3/8) - (1/2)c^{-1/2}\,[1 - (1 + 3c^{1/2})^{-1/2}] < 0,\ 0 \leqslant c \leqslant 1. \tag{8}$$

Как и i(c), функция s(c) монотонно убывает. Она имеет максимальное значение при c = 0, минимальное – при c = 1, и ds/dc нигде не обращается в нуль.

Если исходить из принципа экстремального действия, то следует выбрать режим C = 0, которому соответствует чайлд-ленгмюровское значение тока.Поскольку этот ток является максимально возможным, изложенный подход можно было бы сформулировать в виде "принципа минимального импеданса": в рамках теоретической модели или в условиях конкретного эксперимента диод "выбирает" режим стационарного разряда с минимальным импедансом.

В данном примере max S_t достигается на границе области возможных значений параметра C (и соответственно функции $\Phi(x)$); в такой ситуации вариационная постановка (типа $\delta S_t = 0$) задачи определения профиля пучка, реализующего max S_t, некорректна. Но принцип этого с необходимостью и не требует. В случае магнитоизолированного диода (МИД) вариационная постановка задачи определения профиля потенциала в пучке возможна. В работе /3/ в такой постановке решен вопрос о величине предельного тока МИД в случае бесконечного ведущего магнитного поля.

С действием по Гамильтону: $S_H = \int L(\mathbf{r})d\mathbf{r}dt$, $L(\mathbf{r})$ – объемная плотность лагранжиана, введенная в данной работе величина S связана соотношением:

$$S_t = \int\,[L(\mathbf{r}) + \epsilon_0 N(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = (S_H)_t + \int \epsilon_0 N(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \tag{9}$$

где $(S_H)_t = dS_H/dt$, $N(\mathbf{r})$ – плотность числа электронов, ϵ_0 – энергия одного электрона (в стационарном режиме – постоянная величина). В рассмотренном частном примере $S_t = (S_H)_t$, поскольку $\epsilon_0 = mV^2(x)/2 - e\Phi(x) = 0$. Подчеркнем, что величина $\epsilon_0 N(\mathbf{r})$ не есть плотность энергии в диоде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Child C.D. Phys. Rev., **32**, 492 (1911); Langmuir I. Phys. Rev., **2**, 450 (1913).
2. Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика, т. 1., М.-Л., ГОНТИ НКТП СССР, 1938.
3. Шафер В.Ю. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 37 (1989).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 4 декабря 1989 г.