Краткие сообщения по физике № 2-1990 г.

УДК 533.12

К ВОПРОСУ О КВАНТОВАНИИ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

С.А. Гаджиев*, Р.К. Джафаров*

Дана интерпретация двух основных моментов, на которых базируется квантование Гитмана – Тютина: формального введения импульса, сопряженного времени, и постулата специальной неунитарной временной зависимости шредингеровых операторов.

В теориях релятивистской частицы и в струнных теориях часто используются калибровки, явно зависящие от времени. Эти, а также ряд других задач, приводят к необходимости в общем виде сформулировать правила квантования систем со связями, зависящими от времени. Каноническое квантование систем со связями, не зависящими от времени, сформулировано впервые Дираком /1/ и описано в /2/. Обобщение метода операторного канонического квантования Дирака на случай связей, зависящих от времени, дано в работе Гитмана и Тютина /3/. В рамках метода BFV такое обобщение сформулировано в /4/. В настоящей работе дана интерпретация двух основных моментов, на которых базируется квантование Гитмана – Тютина: формального введения импульса, сопряженного времени, и постулата специальной неунитарной временной зависимости шредингеровых операторов.

В теориях с явной зависимостью от времени лагранжиана или связей в гамильтоновом формализме удобно формально ввести импульс ϵ, сопряженный времени t /3/. В этом случае, определив скобку Пуассона в расширенном фазовом пространстве переменных $(q, p; t, \epsilon)$, можно сохранить и в нестационарном случае структуру всех выражений стационарного случая. В частности, уравнения движения теории со связями второго рода Φ и гамильтонианом H по-прежнему даются скобкой Дирака в таком расширенном пространстве и имеют вид

$$\dot{\eta} = \{\eta, H + \epsilon\}_{D(\Phi)}, \quad \Phi = 0, \quad \eta = (q, p). \tag{1}$$

Операторное квантование в картине Шредингера формулируется следующим образом. Переменные η объявляются операторами $\tilde{\eta}$ с одновременными коммутационными соотношениями

$$\{\tilde{\eta}, \tilde{\eta}'\} = i\{\eta, \eta'\}_{D(\Phi)}\Big|_{\eta = \eta'}, \quad \Phi(\eta, t) = 0. \tag{2}$$

Причем постулируется специальная неунитарная зависимость от времени шредингеровых операторов $\tilde{\eta}$, определяемая операторным условием

$$\dot{\tilde{\eta}} = \{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)}\Big|_{\eta = \tilde{\eta}}. \tag{3}$$

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\,\partial\Psi/\partial t = H(\tilde{\eta}, t)\Psi, \tag{4}$$

где $H(\tilde{\eta}, t)$ – гамильтониан системы.

Покажем, что динамика (1) возникает естественным образом при рассмотрении данной нестационарной теории в несколько видоизмененной формулировке

---

* Азербайджанский государственный университет, г. Баку.

Пусть $L = L(q, \dot{q}, t)$ – лагранжиан некоторой особенной теории, явно зависящий от времени $(q = (q_1, ..., q_n), \dot{q} = dq/dt)$. Рассмотрим другой лагранжиан $L' = L'(q, \dot{q}, \tau, \xi, t)$, зависящий от двух дополнительных переменных τ, ξ и связанный с исходным лагранжианом L следующим образом:

$$L' = \tilde{L} + \xi(\tau - t), \quad \tilde{L} = L(q, \dot{q}, \tau). \tag{5}$$

Теория с лагранжианом L' эквивалентна теории с лагранжианом L в секторе переменных q. Действительно, ее уравнения Лагранжа имеют вид

$$\delta L'/\delta q = \partial\tilde{L}/\partial q - (d/dt)(\partial\tilde{L}/\partial\dot{q}) = 0, \tag{6}$$

$$\delta L'/\delta\tau = \xi + \partial\tilde{L}/\partial\tau = 0, \quad \delta L'/\delta\xi = \tau - t = 0, \tag{7}$$

и с учетом (7) уравнения (6) превращаются в лагранжевы уравнения движения теории с лагранжианом L.

Рассмотрим гамильтонову формулировку теории с лагранжианом L'. Введем импульсы

$$p = \partial L'/\partial\dot{q} = \partial\tilde{L}/\partial\dot{q}, \ \epsilon = \partial L'/\partial\dot{\tau} = 0, \ \kappa = \partial L'/\partial\dot{\xi} = 0. \tag{8}$$

Пусть из соотношений (8) можно найти первично разрешимые скорости $\dot{X}$ и первичные связи $\Phi^{(1)}$, $(q = (X, x), \dot{x} = \lambda)$, $\dot{X} = V(q, p, \lambda, \tau)$, $\tilde{\Phi}^{(1)} = 0$, где $\tilde{\Phi}^{(1)} = \Phi^{(1)}(q, p, \tau)$, $\Phi^{(1)}(q, p, t)$ – очевидно есть связи в теории с лагранжианом L. Тогда гамильтониан $H^{(1)\prime}$ имеет вид:

$$H^{(1)\prime} = ((\partial L'/\partial\dot{q})\dot{q} - \tilde{L} - \xi(\tau - t))_{\dot{X} = V} = \tilde{H} - \xi(\tau - t) + \lambda\tilde{\Phi}^{(1)} + \lambda_\epsilon\epsilon + \lambda_\kappa\kappa, \tag{9}$$

где $\tilde{H} = H(q, p, \tau)$, $H(q, p, t)$ – гамильтониан в теории с лагранжианом L.

Условие сохранения связи $\kappa = 0$ со временем дает $\dot{\kappa} = \{\kappa, H^{(1)\prime}\} = -\partial H^{(1)\prime}/\partial\xi = \tau - t = 0$. Таким образом появляется вторичная связь $\Phi_1^{(2)} = \tau - t$. Рассматривая условие ее сохранения со временем, определим λ_ϵ:

$$\dot{\Phi}_1^{(2)} = \partial\Phi_1^{(2)}/\partial t + \{\Phi_1^{(2)}, H^{(1)\prime}\} = -1 + \lambda_\epsilon = 0, \quad \lambda_\epsilon = 1.$$

Из условия равенства нулю производной по времени от связи $\epsilon = 0$ получим

$$\dot{\epsilon} = \{\epsilon, H^{(1)\prime}\} = -\partial H^{(1)\prime}/\partial\tau = -\partial\tilde{H}/\partial\tau + \xi - \lambda\partial\tilde{\Phi}^{(1)}/\partial\tau = 0,$$

или $\xi = f(q, p, \tau, \lambda)$. Из условия сохранения этой связи со временем найдем $\lambda_\kappa = \varphi(q, p, \tau, \lambda, \dot{\lambda})$, где f и φ некоторые функции, определяемые конкретным видом H и $\Phi^{(1)}$. Подставляя найденные множители Лагранжа в гамильтониан (9) получим на этом этапе

$$H^{(1)\prime} = \tilde{H} - \xi(\tau - t) + \lambda\tilde{\Phi}^{(1)} + \varphi\kappa + \epsilon. \tag{10}$$

Далее можно продолжать процедуру Дирака нахождения λ-множителей и вторичных связей уже с гамильтонианом $H^{(1)\prime}$ /2/. Рассматривая условия сохранения связей $\tilde{\Phi}^{(1)}$ со временем и получаемых таким образом вторичных связей со временем, можно вместо гамильтониана (10) использовать гамильтониан $H^{(1)\prime} = \tilde{H}_{eff} + \lambda\tilde{\Phi}^{(1)}$, где $\tilde{H}_{eff} = \tilde{H} + \epsilon$, поскольку в связях $\tilde{\Phi}^{(1)}$ и получаемых далее вторичных связях не содержится переменных ξ и κ. Пусть $\tilde{\Phi}^{(2)}$ все полученные таким образом связи. Тогда $\tilde{\Phi}^{(2)} = \Phi^{(2)}(q, p, \tau)$, где $\Phi^{(2)}(q, p, t)$ – вторичные связи теории с лагранжианом L.

Предположим, что $\Phi = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})$ – полная система связей теории с лагранжианом L второго рода. Тогда полная система связей теории с лагранжианом L' тоже второго рода и имеет вид $\tilde{\Phi} = 0$, $\tau - t = 0$, $\epsilon = 0$, $\xi - f = 0$, $\kappa = 0$, $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\Phi}^{(2)})$. Тогда, если исключить из рассмотрения переменные ξ и κ, то поскольку связи для них имеют специальный вид [2], уравнения движения для оставшихся переменных η буквально переходят в уравнения движения (1) формулировки Гитмана – Тютина.

Что касается квантования (2) – (4) в картине Шредингера, то его можно интерпретировать следующим образом. Имеется гамильтонова теория с каноническими переменными $\eta = (q, p)$ и (t, ϵ). Поверхность связей описывается уравнениями $\Phi(\eta, t) = 0$. Гамильтониан теории есть H. При квантовании объявляем все переменные операторами с коммутационными соотношениями следующего вида

$$\{\tilde{Q}, \tilde{Q}'\} = \iota \{Q, Q'\}_{D(\Phi)} \Big|_{Q = \tilde{Q}}, \quad Q = (\eta; t, \epsilon). \tag{11}$$

Связи как операторы полагаем равными нулю $\Phi(\tilde{\eta}, t) = 0$, и полагаем условия на вектора состояния

$$H_{eff}\Psi = 0, \quad H_{eff} = H + \epsilon. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что это квантование эквивалентно квантованию по Гитману – Тютину в картине Шредингера. Действительно, реализуем оператор $\tilde{t}$ как оператор умножения на переменную t. Тогда $\tilde{\epsilon} = -\iota\partial/\partial t$.

Из (11) имеем

$$[\tilde{\eta}, \tilde{t}]_- = 0; \quad [\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}]_- = i\, \{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)} \Big|_{\eta = \tilde{\eta}} \tag{13}$$

Так как в выбранной реализации

$$[\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}]_- = \iota\tilde{\eta}, \tag{14}$$

то из (13) и (14) следует условие (3). Условие (12) есть уравнение Шредингера.

Авторы благодарны Д.М. Гитману за ценные советы и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дирак П.А. Лекции по квантовой механике, пер. с англ., М., Мир, 1968.
2. Гитман Д.М., Тютин И.В. Каноническое квантование полей со связями. М., Наука, 1986.
3. Gitman D.M., Tyutin I.V. Quantization of fields with constraints. Springer Verlag, 1990, in print.
4. Batalin I.A., Lyachovith S.L. Nucl. Phys. 1990, in print.

Поступила в редакцию 8 декабря 1989 г.