Краткие сообщения по физике № 4-1990 г.

УДК 533.951

О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

С.И. Попель, В.Н. Цытович

В задаче о динамике пучка электронов в плазме учтены радиационно-резонансные взаимодействия. Найдены условия на характеристики пучка, при которых их учет необходим, получены условия стабилизации пучковой неустойчивости.

Радиационно-резонансные взаимодействия (РРВ) частиц и волн в плазме существенным образом влияют на динамику надтепловой части функции распределения электронов /1–3/. Целью данного сообщения является изучение роли РРВ в процессах развития пучковой неустойчивости. Рассмотрена задача о динамике надтепловой части функции распределения электронов, включающей в себя распределение как надтепловых частиц плазмы так и электронов пучка. Найдены условия на характеристики пучка, при которых учет РРВ необходим.

Пусть при $t = 0$ в бесстолкновительной и однородной плазме имеется произвольное распределение электронов, описываемое $\Phi_v^{(0)}$, причем $(\partial\Phi_v^{(0)}/\partial v) \cdot \mathrm{sign}\, v \leqslant 0$, а $\int \Phi_v^{(0)} dv = n$ — концентрация электронов в плазме, и, кроме того, имеется одномерный пучок электронов (функция распределения $\Phi_v^{(b)}$ с концентрацией $n_b = \int_{v_1^{(0)}}^{v_2^{(0)}} \Phi_v^{(b)} dv$ $(n_b \ll n)$, где $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ — соответственно наименьшая и наибольшая скорости электронов в пучке в момент $t = 0$. Считаем, что $v_1^{(0)} \gg v_{Te}$, $v_2^{(0)} \ll c$, где v_{Te} — тепловая скорость электронов плазмы, c — скорость света. Предполагаем, что выполнено условие применимости кинетического описания $(\Delta v^{(0)}/v_2^{(0)} \gg (n_b/n)^{1/3}$, где $\Delta v^{(0)} \equiv v_2^{(0)} - v_1^{(0)}$. Динамику надтепловой части функции распределения электронов $\Phi_v(t)$, включающей в себя как распределение частиц пучка, так и надтепловых частиц плазмы (при $t = 0$ $\Phi_v(0) = \Phi_v^{(0)} + \Phi_v^{(b)}$), описывает одномерная система уравнений /3/, учитывающая квазилинейные взаимодействия и РРВ:

$$\frac{\partial W_v}{\partial t} = \frac{4\pi^2 e^2}{m\omega_{pe}} v^2 W_v \left(\frac{\partial \Phi_v}{\partial v} + \frac{\alpha n}{2\pi c^2}\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi_v}{\partial t} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{W_v}{v} \left(\frac{\partial \Phi_v}{\partial v} + \frac{\alpha n}{2\pi c^2}\right),$$

где m — масса электрона, e — его заряд, $\alpha = e^2/\hbar c$, $\omega_{pe} = (4\pi n e^2/m)^{1/2}$, W_v — спектр ленгмюровских волн, $W_v \equiv W_q = \omega_{pe}/v$; $\int W_q dq = W$ — плотность энергии волн в плазме. Уравнения (1) сохраняют число частиц в резонансной области, т.е. области скоростей v, где W_v существенно превосходит тепловой уровень.

Можно показать, что в случаях, когда выполнено условие $n_b/n \gg \alpha (v_2^{(0)}/c)^2/4\pi$ или условие $|\partial\Phi_v^{(0)}/\partial v| \gg \alpha n/2\pi c^2$ при $v \in [v_1^{(0)}, v_2^{(0)}]$, или оба эти условия одновременно, РРВ не оказывает влияния на динамику пучковой неустойчивости /4/.

Рассмотрим случай, когда одновременно выполнены обратные условия: $|\partial\Phi_v^{(0)}/\partial v| \ll \alpha n/2\pi c^2$ при $v \in [v_1^{(0)}, v_2^{(0)}]$ и $n_b/n \ll (\alpha/4\pi)(v_2^{(0)}/c)^2$. Если $\alpha (\Delta v^{(0)}/c)^2/4\pi \ll n_b/n \ll \alpha (v_2^{(0)}/c)^2/4\pi$, то, аналогично /4/, можно показать, что при $t < t_0 \approx [\omega_{pe} \alpha (v_2^{(0)}/c)^2]^{-1} \ln (W_0/\widetilde{W})$, ($W_0$ — плотность энергии, переданная волнам частицами, $\widetilde{W}$ — уровень тепловых шумов) развитие пучковой неустойчивости происходит следующим образом: 1) значение $v_1(t)$, соответствующее наименьшей скорости частиц в пучке $(v_1(0) = v_1^{(0)})$, со временем уменьшается, приближаясь к v_{Te}; 2) происходит возбуждение волн с фазовыми скоростями в интервале $[v_1(t), v_2(t)]$, где $v_2(t) \approx \text{const} = v_2^{(0)}$, плотность энергии возбужденных волн имеет порядок $W_0 \sim nmv_2^{(0)}\Delta v(t)\,[\,(n_b/n) + \alpha\,(\Delta v\,(t)/c)^2/12\pi]$, где $\Delta v\,(t) \equiv v_2(t) - v_1(t)$; 3) в интервале между $v_1(t)$ и $v_2(t)$ значение Φ_v близко к квазистационарному: $\Phi_v(t) = \alpha n(v_0\,(t) - v)\,/\,2\pi c^2$, где $v_0(t) = [v_1(t) + v_2(t)]\,/\,2 + 2\pi c^2(n_b + \int_{v_1(t)}^{v_2(t)} \Phi_v^{(0)}dv)\,/\,\alpha n\Delta v\,(t)$; 4) значение $\Phi_v(t)$ в окрестности $v = v_2(t)$ уменьшается, но при $t < t_0$ в окрестности $v_2^{(0)}$ на Φ_v сохраняется участок, где $\partial\Phi_v/\partial v < -\alpha n/2\pi c^2$, поэтому в окрестности $v_2^{(0)}$ возбуждения волн при $t < t_0$ не происходит. В момент $t \sim t_0$ ширина пучка достигает значения $v_2^{(0)} - v_1 \approx (4\pi/\alpha)^{1/2}\,(n_b/n)^{1/2}\,c$, и в окрестности $v_2^{(0)}$ значение $\partial\Phi_v/\partial v$ становится больше, чем $-\,\alpha n/2\pi c^2$. При $t \gg t_0\,\Phi_v(t)$ в окрестности $v_2(t_0) \approx v_2^{(0)}$ уменьшается, и в этой окрестности на $\Phi_v(t)$ образуется участок с положительной производной. Аналогично /3/, можно показать, что наибольшая фазовая скорость возбужденных волн $v_2(t)$ увеличивается, значение $\Phi_v(t)$ при $v \approx v_2(t)$ продолжает уменьшаться. Остановка процесса уменьшения $v_1(t)$ и увеличения $v_2(t)$ происходит в момент, когда значение $\Phi_{v_2(t)}$ становится равным нулю. Положение v_2 изменяется на $\Delta v_2 \equiv v_2 - v_2^{(0)} \sim 2\pi c^2\,\Phi_{v_2}^{(0)}/\alpha n$. Поскольку предполагается выполненным неравенство $|\partial\Phi_v^{(0)}/\partial v|_{v\,=\,v_2} \ll \alpha n/2\pi c^2$, изменение v_2 обычно незначительно $(\Delta v_2 \ll v_{Te}^2/v_2^{(0)})$

Прекращение расширения резонансной области $[v_1(t), v_2(t)]$ является следствием неотрицательности Φ_v и сохранения в рамках (1) числа частиц в области $[v_1(t), v_2(t)]$. Однако при выводе (1) из более общих уравнений, описывающих РРВ /1, 2/, в уравнении для трехмерной функции распределения электронов $\Phi_{\mathbf{p}}$ пренебрегали членами, нарушающими условие сохранения числа частиц в резонансной области: $\pi\alpha\int d\mathbf{p}'(R_{\mathbf{p}',\,\mathbf{p}}\tilde{I}_{\mathbf{p}'}\Phi_{\mathbf{p}'} - R_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'}\tilde{I}_{\mathbf{p}}\Phi_{\mathbf{p}})\,/\,(2\pi)^3$ (где $\tilde{I}_{\mathbf{p}}$ – квазилинейный оператор, $R_{\mathbf{p}',\,\mathbf{p}}$ – функция $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$, вид которой дан в /1, 2/). Их учет приводит к появлению в правой части уравнения (1) для Φ_v дополнительного слагаемого S_v. Основной вклад в эти члены вносят участки v, где $(\partial\Phi_v/\partial v)\,\text{sign}\,v > 0$, т.е. окрестность $v_1(t)$, где Φ_v испытывает скачок $\Delta\Phi_1 \sim [(n_b/n) + (\alpha/4\pi)\,(\Delta v\,(t)/c)]\,[n/\Delta v(t)]$, и, возможно, окрестность $v_2(t)$, в которой, если выполнено условие $\partial\Phi_v/\partial v > 0$, Φ_v испытывает скачок $\Delta\Phi_2$: $0 \leqslant \Delta\Phi_2 \lesssim \Phi_{v_2}^{(0)}$. Оценка S_v при $v \ll c$ имеет вид:

$$S_v \sim \alpha\,(e/mc)^2 \sum_{i=1}^{2} \Delta\Phi_i(W_{v_i}/v_i)\,\text{sign}\,(v_i - v). \tag{2}$$

В случае отсутствия в окрестности v_2 участка с $\partial\Phi_v/\partial v > 0$ слагаемое, соответствующее $i = 2$ в (2), следует опустить.

В правой части уравнения (1) для Φ_v нужно учесть и члены Q_v, соответствующие вкладу индуцированного рассеяния в РРВ /3/. Они содержат малость такого же порядка как и (2). Наиболее существенным членом в уравнении для $\Phi_{\mathbf{p}}$, отвечающим вкладу индуцированного рассеяния в РРВ, является $\pi\alpha\int d\mathbf{p}'\,(R_{\mathbf{p}',\,\mathbf{p}}\tilde{J}_{\mathbf{p}'}\Phi_{\mathbf{p}'})\,/\,(2\pi)^3$, где $\tilde{J}_{\mathbf{p}'}$ – оператор индуцированного рассеяния на электронах. Оценка Q_v при $v_{Te} \ll |v| \ll c$ дает:

$$Q_v \sim \alpha\,(v_{Te}/v_2^{(0)})^2\,(v_{Te}/c)(W_0/nT_e)^2\,(n\omega_{pe}/c)\,[(v_{Te}/v_2^{(0)}) + (\epsilon^{(i)}/\epsilon)]^2\,\text{sign}\,v, \tag{3}$$

где $\epsilon^{(i)}/\epsilon$ – характерное отношение ионной части диэлектрической проницаемости $\epsilon^{(i)}(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}'}, \mathbf{q} - \mathbf{q}')$ к полной диэлектрической проницаемости $\epsilon\,(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}'}, \mathbf{q} - \mathbf{q}')$, $\omega_{\mathbf{q}}$ – частота волны, $\mathbf{q}$ – волновой вектор. При выводе (3) существенно, что волны возбуждены только в области $v > 0$, т.е. их спектр несимметричен $(W_v \neq W_{-v})$. В случае симметричного спектра волн $Q_v \approx 0$. Если $\epsilon^{(i)}/\epsilon \lesssim v_{Te}/v_2^{(0)}$, то $|Q_v/S_v| \ll 1$, и не возникает частиц с $v > v_2$ $(S_v < 0$ при $v > v_2)$, а частицы пучка уходят в область $|v| < v_1$ и в конце концов термализуются. Характерное время термализации частиц пучка $t_1 \sim [\omega_{pe}\alpha\,(v_2^{(0)}/c)^2(n_b/n)]^{-1}$. В случае пучков с $n_b/n \lesssim (\alpha/4\pi)(\Delta\,v^{(0)}/c)^2$, $v_{Te}/v_2^{(0)} \gtrsim \epsilon^{(i)}/\epsilon$ развитие неустойчивости отличается от изложенного выше только тем, что отсутствует этап, когда $v_1(t)$ уменьшается, а $v_2(t) \approx \text{const} = v_2^{(0)}$. Приближение бесстолкновительной плазмы, в котором рассмотрена данная задача, оправдано, если время t_1 значительно меньше, чем обратная частота столкновений электронов пучка с частицами плазмы. Это соотношение справедливо при условии $\alpha\,(n_b/n)(v_2^{(0)}/c)^2(v_2^{(0)}/v_{Te})^3 \gg N_D^{-1}$, где N_D – число частиц в сфере радиуса $r_{De} \equiv v_{Te}/\omega_{pe}$.

Таким образом, в отличие от решения задачи о динамике пучка без учета РРВ /4/, где конечным результатом было установление плато на функции распределения, с учетом РРВ в случае $n_b/n \ll (\alpha/4\pi) \times (v_2^{(0)}/c)^2$, $v_{Te}/v_2^{(0)} \gtrless \epsilon^{(i)}/\epsilon$ граница v_1 пучка размывается, стационарного состояния не устанавливается; за время $\sim t_1$ частицы пучка термализуются и пучок исчезает.

Рассмотрим случай $\epsilon^{(i)}/\epsilon \gg v_{Te}/v_2^{(0)}$. Он может быть реализован при $v_{Te}^2 \lesssim v_{Ti} v_2^{(0)}$, когда $\omega_q - \omega_{q'} \lesssim |q - q'| v_{Ti}$ и $\epsilon^{(i)}/\epsilon \approx T_e/(T_e + T_i)$ ($v_{Ti} = (T_i/M)^{1/2}$, M – масса иона, T_i – температура ионов). В этом случае оказывается существенным рассеяние на ионах, которое может привести к стабилизации пучковой неустойчивости. Без учета РРВ такая задача рассмотрена в /5/. Учет индуцированного рассеяния на ионах приводит к появлению в правой части уравнения (1) для W_v слагаемого: $2\gamma^{NL} W_v = W_v (3\sqrt{2\pi}\, T_e T_i)(8nm)^{-1} \times v_{Ti}^{-1} (T_e + T_i)^{-2} \int W_{k_1}(k_1 + \omega_{pe}/v)\,\mathrm{sign}(k_1 - \omega_{pe}/v)\,dk_1$. Используя систему (1), в которой уравнение для W_v дополнено указанным слагаемым, можно, аналогично /5/, из условия того, что изменение Φ_v в окрестности пучка за все время процесса незначительно, получить условие стабилизации пучковой неустойчивости. В случае $n_b/n \gg \alpha(\Delta v/c)^2/4\pi$ оно совпадает с условием стабилизации, полученным в /5/ без учета РРВ. Если же $n_b/n \ll \alpha(\Delta v/c)^2/4\pi$, то РРВ становятся существенными, и условие стабилизации принимает вид

$$n_b/n \gg \alpha (v_{Ti}/\Delta v)(v_2^{(0)}/c)^2 (T_e + T_i)^2 (T_e T_i)^{-1} \tag{4}$$

В случае $\epsilon^{(i)}/\epsilon \gg v_{Te}/v_2^{(0)}$, $v_{Te}^2 \lesssim v_{Ti} v_2^{(0)}$ появление быстрых частиц за счет источника Q_v из (3) может возникнуть лишь после того, как достигнуто значение $\Delta v \gtrsim (T_e + T_i)^{2/3} T_e^{-2/3} [v_{Te}(v_2^{(0)})^2]^{1/3}$. При этом $|Q_v/S_v| > 1$. Тогда, если не выполнено условие стабилизации пучковой неустойчивости, происходит увеличение Φ_v при $v > v_2$ с темпом $\sim Q_v$. Однако для пучка с $n_b/n \gtrsim \alpha(\Delta v/c)^2/4\pi$ одновременно не выполнить условие стабилизации пучковой неустойчивости и выполнить условие $|Q_v/S_v| > 1$ возможно лишь при очень жестком условии $v_2^{(0)}/v_{Te} > M/m$. Если одновременно выполнены условие стабилизации пучковой неустойчивости и неравенство $|Q_v/S_v| \gg 1$, то за время $\sim 1/\gamma^{NL} \sim (v_{Ti}/v_{Te})(v_2^{(0)}/v_{Te})(nT_e/W_0) \times (T_e + T_i)^2 (\omega_{pe} T_e T_i)^{-1}$ спектр волн симметризуется, после чего $Q_v \approx 0$. Изменение Φ_v при $v_{Te} \ll v \ll c$ за счет Q_v невелико: $\sim Q_v/\gamma^{NL} \sim \alpha(\Delta v/c)(T_e/T_i)^{1/2}(m/M)^{1/2}(n_b/c)$.

Таким образом, показано, что учет РРВ необходим для описания пучков с $n_b/n \ll \alpha(v_2^{(0)}/c)^2/4\pi$. Найден критерий стабилизации пучковой неустойчивости с учетом РРВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович В.Н. ЖЭТФ, 93, 1680 (1987); Изв. ВУЗов, Радиофизика, 31, 912 (1988).
2. Tsytovich V.N. Phys. Reports, 178, 261 (1989).
3. Tsytovich V.N., Popel S.I. Comm. Plasma Phys. Contr. Fusion, 12, 171 (1989).
4. Иванов А.А., Рудаков Л.И. ЖЭТФ, 51, 1522 (1966).
5. Цытович В.Н., Шапиро В.Д. Ядерный синтез, 5, 228 (1965).

Поступила в редакцию 4 января 1990 г.