Краткие сообщения по физике № 4-1990 г.

УДК 530.145+534.2

СВЯЗЬ СПИНА СО СТАТИСТИКОЙ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

М.А. Соловьев

Теорема о связи спина со статистикой обобщена на нелокальные квантовые поля с произвольным высокоэнергетическим поведением вакуумных средних.

Классическое доказательство /1/ теоремы о связи спина со статистикой основано на свойствах аналитичности вакуумных средних в x-пространстве и применимо лишь к локальным и квазилокальным /2/ полям. Ее обобщение на существенно нелокальный случай можно получить построением оболочек голоморфности в p-пространстве /3, 4/. В данном сообщении предложен другой метод, основанный на инвариантном разложении лоренц-инвариантных функционалов.

Существенно нелокализуемые поля определены как операторнозначные обобщенные функции на пространствах Гельфанда–Шилова S_α^β с индексами $\alpha > 1$, $\beta < 1$ /5, 6/. Формирующие $S_\alpha^\beta(\mathbf{R}^n)$ функции удовлетворяют неравенствам $|\partial^q\varphi(x)| \leqslant C\mu^{|q|}q^{\beta q}\exp(-|x/\lambda|^{1/\alpha})$, $x \in R^n$ с зависящими от φ константами C, λ, μ. Аналогично определяются $S_\alpha^\beta(O)$, где O – область в $\mathbf{R}^n$, из них операцией индуктивного предела строятся пространства, соответствующие замкнутым множествам. При $\beta < 1$ функции $\varphi \in S_\alpha^\beta$ аналитичны, и формулировка условия локальной коммутативности становится невозможной, поскольку для нее требуются пробные функции с ограниченным носителем. В импульсном пространстве вакуумные средние заданного на S_α^β поля растут как $\exp(|p|^{1/\beta})$, чем быстрее этот рост, тем сильнее нелокальность. Обобщенная функция на $S_\alpha^\beta(\mathbf{R}^n)$ называется ассоциированной с замкнутым конусом $K \subset \mathbf{R}^n$, если она непрерывна по топологии, индуцируемой из $S_\alpha^\beta(K)$. Основным принципом нелокальной теории /3–6/ является требование ассоциированности коммутатора или антикоммутатора любых двух полей с конусом $(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$, означающее асимптотическую антикоммутативность при большом пространственноподобном разделении аргументов. Связь спина со статистикой называется нормальной, если тензорные поля асимптотически коммутируют сами с собой и со всеми остальными полями, а спинорные асимптотически антикоммутируют. Пространство S_α^β нетривиально лишь при условии $\alpha + \beta \geqslant 1$.

Теорема 1. Пусть f – обобщенная функция на пространстве $S_\alpha^\beta(\mathbf{R}^n)$ $(\alpha + \beta \geqslant 1,\ 0 < \beta < 1)$, а K_1, K_2 – замкнутые конусы в $\mathbf{R}^n$. Тогда: a) если f ассоциирована с $K_1 \cup K_2$, то она допускает разложение $f = f_1 - f_2$, где $f_{1,2}$ ассоциированы с $K_{1,2}$; b) если f ассоциирована с K_1 и K_2, то она ассоциирована с $K_1 \cap K_2$.

Считаем, что $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, поскольку лишь этот случай встретится ниже. Доказательство теоремы для произвольных конусов будет изложено в другом месте. Рассмотрим последовательность отображений

$$0 \to S_\alpha^\beta(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{i} S_\alpha^\beta(K_1) \times S_\alpha^\beta(K_2) \xrightarrow{s} S_\alpha^\beta(\{0\}) \to 0, \tag{1}$$

где i сопоставляет функции φ пару ее ограничений на окрестности конусов $K_{1,2}$, а s переводит (φ_1, φ_2) в разность ограничений на окрестность начала координат. Достаточно убедиться, что последовательность (1) является точной. Действительно, участвующие в ней пространства рефлексивны и имеют сопряженными пространства Фреше. Поэтому замкнутость образов гомоморфизмов i, s эквивалентна замкнутости образов сопряженных к ним i', s' /7/. Тем самым последовательность (1) точна в том и только том случае, если точна двойственная ей, что и дает a), b). Пояснений требует лишь точность в члене $S_\alpha^\beta(\{0\})$, т.е. сюръективность s. Аналитическое продолжение $\varphi \in S_\alpha^\beta(\{0\})$ в R^n удовлетворяет оценке

$$|\partial^q\varphi(x)| \leqslant C\,\Sigma|x^k|\mu^{|q+k|}(q+k)^{\beta(q+k)}/k! \leqslant C'\,2^{\beta|q|}\mu^{|q|}q^{\beta|q|}\exp(h|\mu x|^{1/(1-\beta)})$$

где h — некоторая константа. Фиксируем разделяющую K_1, K_2 гиперплоскость, обозначим через χ характеристическую функцию того полупространства, в котором содержится K_2, и рассмотрим свертку $\chi * \varphi_0$, $\varphi_0 \in S^{\beta}_{1-\beta}$, $\int \varphi_0(x)dx = 1$. Имеем

$$|\partial^q(\chi * \varphi_0)(x)| \leqslant C_0 \mu_0^{|q|} q^{\beta q} \int \chi(\xi) \exp\left(-|(x-\xi)/\lambda_0|^{1/(1-\beta)}\right) d\xi. \tag{2}$$

Найдется число $\theta > 0$ такое, что $|x - \xi| > \theta |x|$, $|x - \xi| > \theta |\xi|$ при всех $x \in K_1$ и тех ξ, для которых $\chi(\xi) \neq 0$. Поэтому в конусе K_1 интеграл (2) не превосходит $C\exp(-(1/2)|\theta x/\lambda_0|^{1/(1-\beta)})$. Выбирая $\lambda_0 < (2h)^{\beta-1}\theta/\mu$ и применяя формулу Лейбница, заключаем, что $(\chi * \varphi_0)\varphi \in S^{\beta}_{\alpha}(K_1)$. Аналогичным образом $(1 - \chi * \varphi_0)\varphi \in S^{\beta}_{\alpha}(K_2)$, что завершает доказательство.

Теорема 2. Каждая ассоциированная с конусом $\bar{V}$ лоренц-инвариантная обобщенная функция f на $S^{\beta}_{\alpha}(\mathbf{R}^4)$, $\beta < 1$, допускает представление в виде разности лоренц-инвариантных функционалов, ассоциированных с $\bar{V}_+$ и $\bar{V}_-$.

Доказательство. Инвариантность установленного в теореме 1 разложения $f = f_+ - f_-$ относительно пространственных вращений достигается усреднением по $SO(3)$. К чистым преобразованиям Лоренца (бустам) этот прием неприменим ввиду их некомпактности. Пусть $B = x^0 \partial_1 + x^1 \partial_0$ — генератор бустов в направлении оси 1. В силу пункта b) теоремы 1 функционал $\eta = Bf_{\pm}$ ассоциирован с $\{0\}$, т.е. имеет вид

$$\Sigma c_q \partial^q \delta(x), \text{ где } \lim (q^{\beta q} |c_q|)^{1/|q|} = 0 \text{ при } |q| \to \infty. \tag{3}$$

Достаточно найти среди обобщенных функций (3) $SO(3)$-инвариантное решение f_0 уравнения $Bf = \eta$, тогда функционалы $f'_{\pm} = f_{\pm} - f_0$ инвариантны уже относительно всей группы $L^{\uparrow}_{+}$. Из коммутационных соотношений генераторов бустов с генераторами вращений J_i следует:

$$J_1 \eta = 0, \quad J_2^2 \eta = \eta, \quad J_3^2 \eta = \eta \tag{4}$$

Обозначим через E_ν конечномерное пространство функционалов вида $\sum_{|q|=\nu} c_q \partial^q \delta(x)$ и проверим, что внутри каждого E_ν оператор B отображает подпространство $L_\nu = \bigcap \ker J_i$ на подпространство, выделяемое формулами (4). После преобразования Фурье E_ν превращается в пространство однородных многочленов степени ν, которое запишем как $\bigoplus_{n=0}^{\nu} p_0^{\nu-n} P_n$, где P_n — пространство однородных многочленов степени n от переменных p_1, p_2, p_3. Соответствующее разложение L_ν выглядит как сумма одномерных подпространств, порождаемых многочленами $\gamma_n = p_0^{\nu-n}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{n+2}$, n четное. Имеем

$$B\gamma_n = n\eta_{n-1} + (\nu - n)\eta_{n+1}, \quad \eta_{n+1} = p_0^{\nu-n-1} p_1 \|\mathbf{p}\|^n. \tag{5}$$

Заметим, что любой удовлетворяющий условиям (4) многочлен из P_n (n нечетное) кратен $p_1 \|\mathbf{p}\|^{n-1}$. Действие на него оператора Казимира $\mathbf{J}^2$ состоит в умножении на 2. Поэтому он содержится в первом слагаемом разложения $P_n = \|\mathbf{p}\|^{n-1} H_1 \oplus \ldots \oplus \|\mathbf{p}\|^2 H_{n-2} \oplus H_n$ на неприводимые $SO(3)$-инвариантные подпространства. Здесь H_m — пространство гармонических многочленов степени m, а в $H_1 = P_1$ оператором J_1 зануляются лишь кратные p_1 вектора. Остается убедиться, что среди решений f_0 имеется удовлетворяющее условию (3) на коэффициенты. Это делается с помощью формул (5).

Следствие. Пусть лоренц-инвариантная обобщенная функция f определена на пространстве S^{β}_{α}, $\alpha > 1$, $\beta < 1$ и ассоциирована с $\bar{V}$. Если носитель ее преобразования Фурье $g = \tilde{f}$ обращается в нуль в окрестности какой-либо пространственноподобной точки, то f нечетна.

Используя инвариантное разложение и совершая преобразование Лапласа, получаем представление g в виде разности граничных значений функций $g_{\pm}(s)$, голоморфных в трубах $T_{\pm} = \{s = p + iq \in \mathbf{C}^4 : q \in V_{\pm}\}$. Согласно теореме Баргмана — Холла — Вайтмана /1/ каждая из них допускает симметричное относительно отражения $s \to -s$ аналитическое продолжение в расширенную область T, которая содержит все пространственноподобные точки. Из предположения о носителе g следует $g_+(s) = g_-(s)$, $s \in T$, и для любой $\psi \in S^{\alpha}_{\beta}$ имеем

$$(g(p), \psi(p)) = \lim_{q\to 0,\ q\in V_+} \int [g_+(p + iq) - g_-(p - iq)]\, \psi(p) dp =$$
$$= \lim_{q\to 0,\ q\in V_+} \int [g_-(-p-iq) - g_+(-p + iq)]\, \psi(p) dp = -(g(p), \psi(-p)).$$

Основным утверждением теоремы о связи спина со статистикой является запрет аномальных перестановочных соотношений между полем и эрмитово сопряженным к нему. Теперь мы подготовлены к его обобщению.

Теорема 3. Пусть A – поле на S^{β}_{α}, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, преобразующееся по неприводимому комплексному представлению группы SL(2, C), накрывающей $L^{\uparrow}_{+}$, Ψ_0 – вакуумный вектор. Аномальное асимптотическое перестановочное соотношение между A и A* приводит к равенству $A(x)\Psi_0 = 0$.

Доказательство. Введем обозначения $W(x_1 - x_2) = \langle\Psi_0, A(x_1)A^*(x_2)\Psi_0\rangle$, $W'(x_1 - x_2) = \langle\Psi_0, A^*(x_1) \times A(x_2)\Psi_0\rangle$. В случае скалярного поля аномальное перестановочное соотношение означает, что обобщенная функция $W(\xi) + W'(-\xi)$ ассоциирована с $\bar{V}$. Тогда, согласно следствию теоремы 2, она нечетна. Поэтому и функционал $W(\xi) + W'(\xi)$ нечетен и, значит, равен нулю, ибо его фурье-образ сосредоточен в $\bar{V}_+$. Усредняя с пробной функцией $\bar{\varphi}(x_1)\varphi(x_2)$, получаем $\| A(\bar{\varphi})^*\Psi_0\|^2 + \| A(\varphi)\Psi_0\|^2 = 0$. В общем случае надо воспользоваться разложением /1/ по стандартным полиномиальным ковариантам и затем разложением теоремы 2. Это дает

$$\tilde{W}(p) \pm \tilde{W}'(-p) = \mp\tilde{W}(-p) - \tilde{W}'(p), \tag{6}$$

где верхний знак соответствует однозначным представлениям $L^{\uparrow}_{+}$, а нижний двузначным. При любом знаке равенство (6) вступает в противоречие со спектральным условием.

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. и др. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.
2. Иофа М.З., Файнберг В.Я. ЖЭТФ, **56**, 1644 (1969).
3. Lücke W. Commun. Math. Phys., **65**, 77 (1979).
4. Lücke W. Acta Phys. Austr., **55**, 213 (1984).
5. Fainberg V.Ya., Soloviev M.A. Ann. Phys., **113**, 421 (1978).
6. Ефимов Г.В. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М., Наука, 1985.
7. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., Мир, 1971, с. 204.

Поступила в редакцию 30 января 1990 г.