

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИЕЙ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ РЕЛЕЯ – ТЕЙЛОРА МЕЛКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОДЫ

С.В. Буланов, С.Г. Шашарина

Построены автомодельные решения, описывающие эволюцию огибающих нелинейных волн в неоднородной плазме и динамику капель конечной амплитуды при неустойчивости Рейля – Тейлора мелкой вращающейся жидкости.

В настоящей работе обращено внимание на подобие нелинейной стадии модуляционной неустойчивости в неоднородной среде и неустойчивости Рейля – Тейлора мелкой вращающейся жидкости (рис. 1).

Модуляционную неустойчивость описываем уравнением для Ψ – амплитуды огибающей волновых пакетов /1/

$$\partial_t \Psi + (1/2)\Delta\Psi + [|\Psi|^2 - \delta N(x)] \Psi = 0. \tag{1}$$

В нем учтено изменение диэлектрической проницаемости из-за стрикционной или тепловой нелинейности и вследствие неоднородности среды. Положим $\delta N(x) = x_i \tau_{ij} x_j / 2$, что соответствует окрестности экстремумов в распределении концентрации.

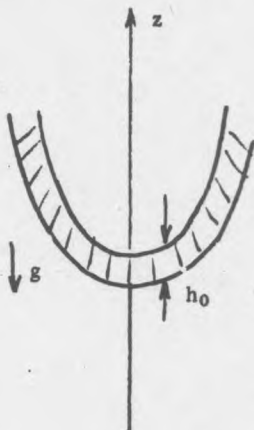


Рис. 1. "Мелкая опрокинутая вода" на внешней поверхности параболоида вращения.

В квазиклассическом приближении для $\Psi = Ae^{i\varphi}$ в длинноволновом пределе пренебрежем высшими производными по координатам. Тогда, следуя работе /2/, для $|A|^2$ и Φ получим систему уравнений

$$\partial_t |A|^2 + \partial_i (|A|^2 \partial_i \Phi) = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t \Phi + (1/2)\partial_i \Phi \partial_i \Phi = |A|^2 - (1/2)x_i \tau_{ij} x_j, \tag{3}$$

которая допускает автомодельную подстановку

$$|A|^2 = n(t) + (1/2)x_i n_{ij}(t)x_j, \quad \Phi = \varphi(t) + (1/2)x_i \varphi_{ij}(t)x_j. \tag{4}$$

Здесь лагранжева x_i^0 и эйлера x_i координаты связаны соотношением: $x_i = M_{ij}(t)x_j^0$, $M_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Выражения (4) описывают возмущения, локализованные внутри трехосного эллипсоида; матрица $M_{ij}(t)$ задает его деформацию.

Из соотношений (3), (4) получаем $\dot{\varphi}_{ij}(t) = \dot{M}_{ik}(t)M_{kj}^{-1}(t)$. Подобный подход к решению автомодельных уравнений использовался в [3].

Для матрицы $M_{ij}(t)$ имеет место уравнение

$$\dot{M}_{ij} + \tau_{ik}M_{kj} = -n_{ik}(0)M_{kj}^{-1}/D. \quad (5)$$

Здесь $n(0)$ и $n_{ij}(0)$ – начальные значения n , n_{ij} , а $D(t) = \det(M_{ij}(t))$. Так как матрицы τ_{ij} , $n_{ij}(0)$, M_{ij} симметричные, то (5) имеет интеграл

$$\dot{M}_{ik}n_{kl}^{-1}(0)\dot{M}_{li} + M_{ik}n_{km}^{-1}(0)\tau_{ml}M_{li} - 2/D = I_0. \quad (6)$$

В частном случае, которому отвечают диагональные матрицы $\tau_{ij} = \text{diag}[G_1, G_2, G_3]$, $n_{ij}(0) = \text{diag}[a_1, a_2, a_3]$, $M_{ij} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t), a_3(t)]$, интеграл (6) определен соотношением

$$I_0 = (\dot{a}_1^2 + G_1 a_1^2)/a_1 + (\dot{a}_2^2 + G_2 a_2^2)/a_2 + (\dot{a}_3^2 + G_3 a_3^2)/a_3 - 2/(a_1 a_2 a_3). \quad (7)$$

В зависимости от знаков G_i возможна как стабилизация неустойчивости, так и более быстрый рост возмущений в направлениях, определяемых неоднородностью G_i .

В сферически симметричном ($d=3$), осесимметричном ($d=2$) и плоском ($d=1$) случаях вблизи особенности, которая наступает за конечное время, функция $a(t)$ убывает по закону $a(t) = (t_0 - t)^{2/(2+d)}$.

Сферически симметричный и осесимметричный режимы неустойчивы. Представив $a_a(t) = a(t) + \delta a_a(t)$, где $a(t)$, $a = 1, 2, 3$ (задано выше), получим из (5) для отклонения от симметричного решения вблизи особенности при $a(t) \rightarrow 0$

$$\delta a_a - \delta a_b = C_1 (t_0 - t)^{q_1} + C_2 (t_0 - t)^{q_2}, \quad (8)$$

где показатели равны $q_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})/2$ при $d=2$ и $q_1 = 6/5, q_2 = -2/5$ для $d=3$. Поскольку один из показателей в (8) отрицателен, отклонения от симметрии возрастают.

На рис. 2 приведены результаты численного интегрирования (5). Видно, что в типичном случае особенности отвечает обращение в нуль одной из функций a_i за конечное время.

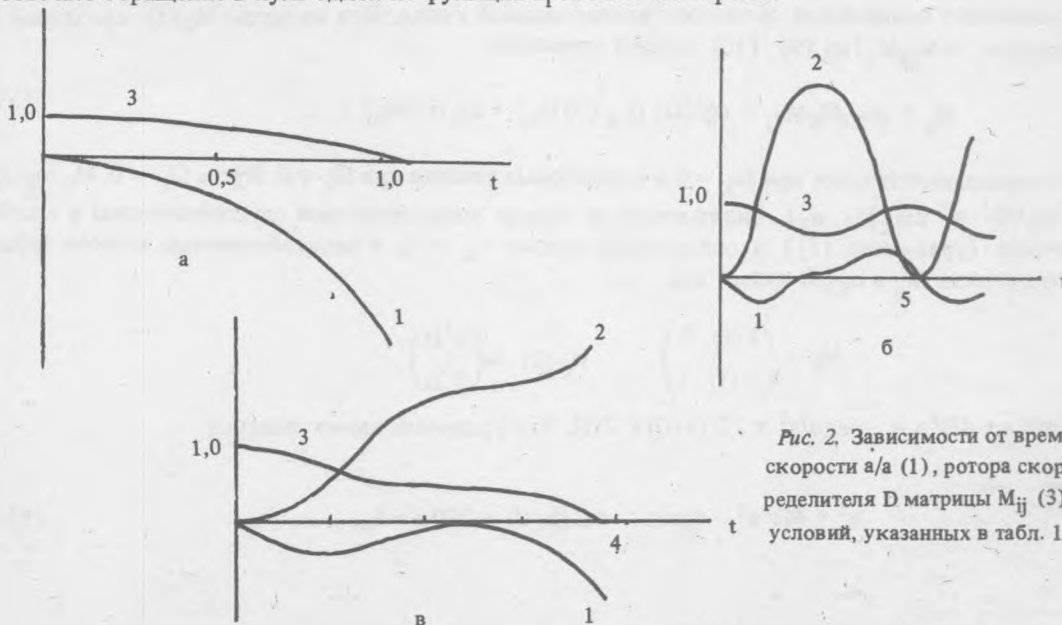


Рис. 2. Зависимости от времени дивергенции скорости a/a (1), ротора скорости b/a (2) и определителя D матрицы M_{ij} (3) для начальных условий, указанных в табл. 1.

Начальные условия для расчетов кривых на рис. 2

	$2ag$	$a(0)$	$a(0)$	$b(0)$	$b(0)$	Ω
а	-1	0	1	0	0	0
б	1	0	1	0	0	2,829
в	1	0	1	0	0	2,828

Неустойчивость мелкой вращающейся "опрокинутой" воды описывается системой

$$\partial_t h + \partial_i (v_i h) = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i + 2\epsilon_{ijk} \Omega_j v_k = -g \partial_i h, \quad (10)$$

которая отличается от приведенной в [4] последним слагаемым в левой части (10). Здесь h – глубина жидкости, v_i – вектор скорости, g – гравитационное ускорение, Ω_k – вектор угловой скорости, параллельный оси z .

Эти уравнения допускают статические решения, которым соответствуют: жидкость с постоянной глубиной $h > 0$, налитая на внутреннюю поверхность параболоида $z^2 = (\Omega^2/2g)(x^2 + y^2)$, и жидкость глубиной $h < 0$ на внешней поверхности этого параболоида (рис. 1). Состояние с $h < 0$ неустойчиво. Линеаризация (9), (10) приводит к дисперсионному уравнению для частоты возмущений ω как функции волнового числа k : $\omega^2 = \Omega^2 - g|h_0|k^2$. Видно, что вращение стабилизирует длинноволновые возмущения.

Система (9), (10) допускает автомодельную подстановку

$$h = h(t) + x_i h_{ij}(t) x_j / 2, \quad v_i = w_{ij}(t) x_j. \quad (11)$$

Эти выражения описывают нелинейную эволюцию изолированной капли. Для матрицы $M_{ij}(t)$, связанной с $w_{ij}(t)$ соотношением $w_{ij} = M_{ik} M_{ij}^{-1}$, из (9), (10) следует уравнение

$$M_{ij} + 2\epsilon_{ikl} \Omega_k M_{lj} = (g/2D) (h_{ik}(0) M_{kj}^{-1} + h_{ik}(0) M_{ki}^{-1}), \quad (12)$$

где $D = \det M_{ij}$.

Рассмотрим потенциальные течения при $\Omega_k = 0$ и одномерные течения при $\Omega_k \neq 0$. Пусть $\Omega_k = 0$, $M_{ij} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]$, $h_{ij}(0) = \text{diag}[a_1, a_2]$. Видна аналогия между модуляционной неустойчивостью в квазиклассическом пределе (уравнение (5)) в однородной плазме $\tau_{ik} = 0$, и неустойчивостью мелкой воды.

Если $\Omega_k \neq 0$, то матрицы M_{ij} и $h_{ij}(0)$ имеют вид

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{ij}(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (12) следует, что $\ddot{a} + 4\Omega^2 a = -2ga/a^2 + 2\Omega[b(0) + 2\Omega]$. Это уравнение имеет интеграл

$$a^2 + 4\Omega^2 a^2 - 4ga/a - 4\Omega[b(0) + 2\Omega]a = I_0. \quad (13)$$

Сравнение (7) и (13) показывает, что асимптотическое поведение потенциала для положительных G_a в одномерном случае ($d = 1$) для (7) и (13) одно и то же. Если $b(0) = -2\Omega$, то (13) с точностью до обозначений совпадает с (7). Величина $4\Omega^2$ играет в этом случае роль второй производной по пространственным координатам от концентрации фоновой плазмы в задаче о модуляционной неустойчивости. На рис. 2 представлены полученные численно зависимости от времени функций $a(t)/a(t)$, $b(t)/a(t)$, $D(t)$ для случаев нулевой угловой скорости $\Omega = 0$ (рис. 2а) и для ненулевого значения Ω такого, что вращение стабилизирует (рис. 2б) и не стабилизирует неустойчивость (рис. 2в).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. В сб. Физика плазмы (Основы физики плазмы), под ред. А.А. Галева, Р. Судана, т. 2, М., Энергоатомиздат, 1984, с. 79.
2. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. ЖЭТФ, 91, 1310 (1986).
3. Буланов С. В., Ольшанецкий М. А. Физика плазмы, 11, 727 (1985).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика, М., Наука, 1986.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 27 октября 1988 г.