Краткие сообщения по физике № 3-1988 г.

УДК 530.145

СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГЕБРА ВИРАСОРО

А.М. Семихатов

Найдено действие алгебры Вирасоро на произвольном решении иерархии Кадомцева – Петвиашвили, соответствующее при отображении Кричевера действию на J-дифференциалах на римановой поверхности, порождающей данное решение.

Попытки переформулировать теорию струн в терминах бесконечномерного грассманиана /1/ привлекают к себе возрастающее внимание /2/. Однако грассманиан может оказаться /3/ лишь важным промежуточным пунктом на пути от формулировки Полякова к описанию в терминах иерархии Кадомцева – Петвиашвили (КП) – универсальной системы точно интегрируемых уравнений /4/. Настоящая работа посвящена выяснению того, как описывается в терминах КП один из важнейших ингредиентов теории струны – алгебра Вирасоро. Наша цель – замкнуть диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\text{J-дифференциалы}\\ \text{на римановой}\\ \text{поверхности}\end{array} \arrow[r, "\text{Отображение Кричевера}"] \arrow[d, "\mathrm{Vect}\,S^1"] & \begin{array}{l}\text{Вектор в}\\ \text{гильбертовом}\\ \text{пространстве}\end{array} \arrow[r, "/1,4/"] \arrow[d, "\text{Алгебра Вирасоро}"] & \begin{array}{l}\text{Решение}\\ \text{иерархии КП}\end{array} \arrow[d, "?"] \\
\begin{array}{l}\text{J-дифференциалы}\\ \text{на римановой}\\ \text{поверхности}\end{array} \arrow[r, "\text{Отображение Кричевера}"] & \begin{array}{l}\text{Вектор в}\\ \text{гильбертовом}\\ \text{пространстве}\end{array} \arrow[r, "/1,4/"] & \begin{array}{l}\text{Решение}\\ \text{иерархии КП}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

Первая вертикальная стрелка – действие векторных полей на римановой поверхности производными Ли. Вторая вертикальная стрелка действует в фермионном фоковском пространстве $\mathcal{H}_F$, тесно связанном с грассманианом ($\mathcal{H}_F = \Gamma(\mathrm{Gr}, \mathrm{DET}^*)$), и представляется билинейными по фермионам операторами. В коммутационных соотношениях этих операторов возникает центральный заряд, из-за чего рассматриваемая диаграмма лишь проективно коммутативна. Сквозные горизонтальные отображения выражают тот фундаментальный факт, что решениями интегрируемых уравнений являются, в некотором смысле, римановы поверхности и геометрические данные на них (гипотеза Новикова, доказанная Муласе и Шиотой).

Рассмотрим расслоение ω^J J-дифференциалов над римановой поверхностью S с выделенной точкой P и локальной координатой z^{-1} в окрестности U, содержащей точку P. Тривиализуем ω^J над $U' \equiv U \setminus \{P\}$, выбрав сечение $\sigma_0(z) = z^{-N-J}(dz)^J$. Алгебра Ли векторных полей на U' действует на сечения $\Gamma(U', \omega^J)$ производными Ли. С помощью σ_0 любая функция на U' поднимается до сечения, и тем самым определяется действие векторного поля на эту функцию. Таким образом для алгебры Ли $\mathrm{Vect}\,S^1$ векторных полей на окружности $|z| = 1$ получаем представление на пространстве функций на окружности $H = L^2(S^1, C)$: для $L_n = -z^{n+1}\partial/\partial z \in \mathrm{Vect}\,S^1$ находим:

$$L_n: z^k \to (N - Jn - k)\, z^{k+n}, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

При отображении Кричевера /1, 2/, сопоставляющем набору данных $(S, \omega^J, P, z^{-1}, \sigma_0)$ вектор $|W\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_F$, представление (1) накрывается проективным представлением $\mathrm{Vect}\,S^1$ (т.е. представлением алгебры Вирасоро), которое описано, например, в /2/. Пространство $\mathcal{H}_F$ является фоковским пространством над вакуумом $|0\rangle$, построенным с помощью системы фермионов ψ_m, ψ^*_m, $m \in \mathbb{Z}$ в соответствии с

$$\{\psi_m, \psi_n\} = 0, \quad \{\psi_m^*, \psi_n^*\} = 0, \quad \{\psi_m, \psi_n^*\} = \delta_{mn},$$

$$\psi_i|0\rangle = 0, \ \ i \geqslant 0; \quad \psi_j^*|0\rangle = 0, \ \ j < 0.$$

Генераторы алгебры Вирасоро в представлении, накрывающем (1), имеют вид:

$$\mathcal{L}_p = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} (N - Jp - k) : \psi_{k+p}\psi_k^*: \tag{2}$$

Вектор $|W\rangle \in \mathcal{H}_F$ несет полную информацию об исходных геометрических данных. Без потери этой информации он, в свою очередь, может быть перекодирован в виде некоторого решения иерархии КП /4, 1/.

Определив $a_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_{k+p}\psi_k^*:$, рассмотрим бесконечный набор времен $t_1 \equiv x, t_2, t_3, \ldots$ и положим $H(t) = \sum_{n \geqslant 1} a_n t_n$. Тау-функция иерархии КП, соответствующая вектору $|W\rangle$, определяется равенством $\tau_W(t) = \langle 0| e^{H(t)} |W\rangle$, где $\langle 0|\psi_i^* = 0$, $i \geqslant 0$ и $\langle 0|\psi_j = 0$, $j < 0$. Введем $\psi\_(z) = \exp(-\sum_{n \geqslant 1} a_n z^{-n}/n)$ и определим волновую функцию иерархии КП формулой

$$w_W(t,z) = \frac{1}{\tau_W(t)} \langle 0| e^{H(t)} \psi\_(z) |W\rangle. \tag{3}$$

Для краткости пишем w_W вместо $w_{|W\rangle}$ и т.п.

По волновой функции $w_W(t,z)$, разлагающейся в ряд вида $w_W(t,z) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} w_n(t) z^{-n}$, восстанавливается псевдодифференциальный (формальный) оператор

$$K \equiv K_W = 1 + \sum_{n \geqslant 1} w_n(t) D^{-n}, \tag{4}$$

где $D = \partial/\partial x$ (напомним, что $x \equiv t_1$), удовлетворяющий уравнениям иерархии КП:

$$\partial K/\partial t_r = -(Q^r)\_K, \quad Q \equiv KDK^{-1}, \quad r \geqslant 1 \tag{5}$$

(для $A = \Sigma a_n D^n$ обозначено $A\_ = \sum_{n \leqslant -1} a_n D^n$).

Находим сначала вариацию волновой функции под действием операторов (2), а затем восстанавливаем вариацию оператора К.

Определение:

$$\delta_p w_W(t,z) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} w_{|W\rangle + \epsilon \mathcal{L}_p |W\rangle}(t,z)|_{\epsilon=0}.$$

Подчеркнем, что это не сводится к вставке $\mathcal{L}_p$ в среднее (3).

В качестве промежуточного этапа вычислений отметим следующее

Утверждение 1:

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} u^{-p} \delta_p w_W(t,z) = (\Phi(t,u) + (N + \tfrac{1}{2}) + (J - \tfrac{1}{2}) u \frac{\partial}{\partial u} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\nabla_n - \sum_{p \geqslant 1} (\frac{u}{z})^p)) (\nabla_u - \sum_{r \geqslant 1} (\frac{u}{z})^r) w_W(t,z), \tag{6}$$

где $\Phi(t,u) \equiv \nabla_u \ln \tau_W(t) + u \dfrac{\partial}{\partial u}\, \xi(t,u)$; $\nabla_u \equiv \sum\limits_{r\geqslant 1} u^{-r} \dfrac{\partial}{\partial t_r}$; $\xi(t,u) \equiv \sum\limits_{r\geqslant 1} t_r u^r$.

Далее, используя уравнения иерархии КП (5), можно избавиться в (6) от всех производных $\partial/\partial t_r$ при $r \geqslant 2$. Таким путем получается окончательное

Утверждение 2:

$$\sum_{p\in \mathbb{Z}} u^{-p} \delta_p w_W(t,z) = e^{-\xi(t,z)} (-\Gamma(u)\_K)\, e^{\xi(t,z)},$$

где $-\Gamma(u)\_K$ оказывается соответствующей вариацией оператора K; $\Gamma(u) = (N+1)\delta(u,Q) + (J-1)u \dfrac{\partial}{\partial u}\, \delta(u,Q) + K'K^{-1}\delta(u,Q)u + (\xi(t,u) - xu)\delta(u,Q)$.

Здесь использованы определения: $\delta(u,z) = \sum\limits_{n\in \mathbb{Z}} (u/z)^n$; $K' = -\sum\limits_{n\geqslant 1} n w_n(t) D^{-n-1}$.

В качестве критерия самосогласованности имеем

Утверждение 3: $-\Gamma(u)\_K$ удовлетворяет линеаризованной иерархии КП на фоне K.

Пусть M – пространство псевдодифференциальных операторов вида (4). Определим на M векторное поле $C(u)$ следующим образом: для всякой функции $K \to \varphi(K)$ положим $(C(u)\varphi)(K)$ = (главная линейная часть приращения $\varphi(K)$ при вариации аргумента $\delta K = \Gamma(u)\_K$). Вычисляя, получаем

Утверждение 4: $C(u)$ действительно задает представление $\mathrm{Vect}\, S^1$, ибо

$$[C(u), C(v)] = -u \frac{\partial\delta(u,v)}{\partial u}\, C(u) + v \frac{\partial\delta(u,v)}{\partial v}\, C(v).$$

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за поддержку и обсуждение работы, а также А.О. Радулу за полезные разъяснения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal G. B., Wilson G. Publ. Math. IHES, 61, 1 (1985).
2. Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H. Mod. Phys. Lett., A2, 119 (1987); Alvarez-Gaume L., Gomez C., Reina C. Phys. Lett., 190B, 55 (1987); New methods in string theory, CERN-TH. 4775/87 (1987).
3. Saito S. Preprint TMUP-HEL-8615, Tokyo, 1986; Phys. Rev., D36, 1819 (1987).
4. Date E. et al. In: Proc. RIMS Symp. on Non-Linear Integrable Systems, ed. by M. Jimbo, T. Miwa, World Sci. Publ. Co., Singapore 1983, p. 40.

Поступила в редакцию 27 ноября 1987 г.