Краткие сообщения по физике № 5-1988 г.

УДК 530.145

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ МИКРОПРИЧИННОСТИ

В.Я. Файнберг, Ш.Ю. Ломсадзе

Получены дисперсионные соотношения в нелокализуемых теориях с экспоненциальным ростом амплитуд в импульсном пространстве в предположении, что они аналитичны в дважды разрезанной плоскости по переменной энергии s и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

В работе /1/ впервые было показано, что принцип микропричинности накладывает ограничение на рост матричных элементов в импульсном представлении в комплексной области. Этот вопрос был затем подробно исследован в ряде работ /2–5/, где разрабатывался сходный круг проблем. Часть результатов этих работ, касающихся возможного роста амплитуд рассеяния при увеличении мандельштамовской переменной s, может быть сформулирована следующим образом.

Максимальный рост амплитуды F, для которой еще можно сформулировать условие микропричинности, ограничивается выполнением в верхней полуплоскости обобщенного принципа максимума Фрагмена – Линделефа – Неванлинн /1/

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi d\varphi \ln^+ |F(Re^{i\varphi})| \sin\varphi = 0, \quad s = Re^{i\varphi}. \tag{1}$$

Условие (1) означает, что амплитуда F в верхней полуплоскости растет медленнее любой линейной экспоненты

$$|F(z)| \leqslant \exp\left\{\epsilon |z|\right\}, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{2}$$

Линейный экспоненциальный рост

$$|F(z)| \leqslant \exp\left\{l|z|\right\} \tag{3}$$

с некоторым $l > 0$ соответствует случаю, когда амплитуда локализуема лишь с точностью l и, следовательно, микропричинность оказывается нарушенной на расстояниях порядка l.

В /6/ обращено внимание на то, что теория бозонных, равно как и фермионных, и гетеротических струн приводит, по крайней мере в низших порядках теории возмущений, к нелокальному экспоненциальному поведению амплитуд бинарных реакций. Так, амплитуда рассеяния двух тахионов друг на друге в теории открытых бозонных струн в древесном приближении имеет следующую асимптотику во всей открытой верхней s-полуплоскости /6/:

$$A_{tree} \approx 8ig^2 e^{-8} (stu)^{-3} \exp\left[-\frac{1}{4}(s\ln s + t\ln t + u\ln u)\right], \tag{4}$$

где s, t, u – мандельштамовские переменные; $p_i^2 = 8$, $s + t + u = -32$; угол рассеяния φ здесь фиксирован: $\sin^2(\varphi/2) = -t/(s+32)$, $\cos^2(\varphi/2) = -u/(s+32)$, $l^2 = 1$ – квадрат планковской длины.

В этой ситуации возникает естественная мысль попытаться обобщить обычные дисперсионные соотношения (см., напр., /7/) на случай нелокального поведения амплитуд. Такие соотношения были, например, выписаны без доказательства в /8/. Для полного решения проблемы сначала необходимо доказать аналитические свойства амплитуды рассеяния в нелокальной аксиоматической квантовой теории поля. Оставляя в стороне эту насущную и нерешенную пока проблему, будем предполагать их обычными, но вместо условия (1) введем более слабое условие

$$|F(z)| = 0(\exp\{r^A\}) \quad \text{при } |z| = r \to \infty \tag{5}$$

с некоторым $A > 0$. Случаи линейного экспоненциального и более быстрого роста амплитуды будем рассматривать одновременно.

Докажем, что несмотря на необычность условия (5), дисперсионные соотношения справедливы для $\ln F$, а также непосредственно для F при некоторых дополнительных условиях.

Теорема. Пусть функция

$$F : z = E + iy \in C^1 \to F(z) \in C^1 \tag{6}$$

удовлетворяет следующим условиям: 1) она голоморфна во всей дважды разрезанной z-плоскости с разрезами от $-\infty$ до $-E_0$ и от E_0 до $+\infty$ с $E_0 > 0$; 2) непрерывна на берегах разрезов; 3) вещественно подобна; 4) удовлетворяет условию (5) (вместо обычного (1)); 5) имеет лишь конечное число нулей и $F(0) \neq 0$; 6) вдоль разрезов фаза Φ амплитуды F ограничена полиномально:

$$|\Phi(E \pm i0)| = 0(|E|^n) \quad \text{при } E \to \pm\infty. \tag{7}$$

Тогда по всем комплексным направлениям

$$|\ln F(z)| = 0(|z|^m) \quad \text{при } |z| \to \infty. \tag{8}$$

Здесь $m = \max(n+1, k)$, k – порядок функции F, т.е. нижняя грань чисел A, для которых еще выполнено (5).

Доказательство. Прежде всего построим вспомогательную амплитуду, не имеющую нулей:

$$\tilde{F}(z) = F(z) / [\prod_{i=1}^{N} (1 - z/z_i)], \quad \tilde{F}(0) = F(0) \tag{9}$$

Очевидно, фаза $\tilde{\Phi}$ амплитуды $\tilde{F}$ также удовлетворяет условию (7).

Рассмотрим следующий интеграл (подобный прием использован в работе /9/):

$$P(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\Phi}(E + i0)\, dE}{(E - z_0)^{n+1}(E - z)}, \quad \operatorname{Im} z_0 \neq 0. \tag{10}$$

Его сходимость обеспечивается условием (7) для $\tilde{\Phi}$. Легко убедиться, что по всем комплексным направлениям справедлива оценка

$$|P(z)| \leqslant C_1 |z|^{n+1} + C_2, \tag{11}$$

где $C_1, C_2 > 0$. Вдоль берегов разрезов благодаря вещественноподобности имеем

$$\operatorname{Im} P(E \pm i0) = \tilde{\Phi}(E \pm i0). \tag{12}$$

Поэтому функция

$$H(z) = \widetilde{F}(z) / [F(0) \exp\{P(z)\}] \tag{13}$$

является целой во всей z-плоскости, не имеющей нулей функцией. Ее порядок ρ конечен благодаря условиям (5) и (11), причем

$$\rho \leqslant \max\{n+1, \ k\}. \tag{14}$$

По теореме Адамара (см., напр., /10/, с. 259) H представима в виде

$$H(z) \exp\{Q(z)\}, \tag{15}$$

где $Q(z)$ – полином, степень которого не превосходит ρ. Таким образом, для исходной функции F справедливо представление

$$F(z) = \prod_{i=1}^{N} (1 - z/z_i) F(0) \exp\{P(z) + Q(z)\}, \tag{16}$$

откуда простым логарифмированием получаем желаемый результат (8). Он позволяет написать для ln F дисперсионные соотношения с конечным числом вычитаний. Применяя теорему Коши к вспомогательной функции

$$G(z) = \ln \widetilde{F}(z) / (z - z_0)^{m+1}, \quad z_0 \in C^1 \tag{17}$$

получаем

$$\left[\int_{-\infty}^{-E_0} + \int_{E_0}^{+\infty}\right] \frac{\widetilde{\Phi}(E + i0)\, dE}{(E - z_0)^{m+1}(E - z)} + \sum_{i=1}^{m+2} \frac{P_i}{(z - z_0)^i} = \pi G(z) \tag{18}$$

с некоторыми $P_i \in C^1$. Если использовать вспомогательную функцию

$$G'(z) = (z - E_0) G(z) / [\sqrt{z - E_0}\, \sqrt{E_0 - z}], \tag{19}$$

где разрез функции $\sqrt{z}$ подразумевается от 0 до $+\infty$, то получим аналогичное соотношение для $\ln |F|$:

$$\left[\int_{-\infty}^{-E_0} + \int_{E_0}^{+\infty}\right] \frac{dE \ln |\widetilde{F}(E + i0)|^2 (E - E_0)}{\sqrt{E - E_0 + i0}\sqrt{E_0 - E - i0}\,(E - z)^{m+1}} + \sum_{i=1}^{m+2} \frac{P_i'}{(z - z_0)^i} = 2\pi i G'(z). \tag{20}$$

Перейдем к обсуждению дисперсионных соотношений для самой амплитуды. Будем по-прежнему предполагать справедливость для амплитуды условий 1 – 4 доказанной выше теоремы. Предположим, что вдоль берегов разрезов мнимая часть амплитуды ограничена полиномиально:

$$|\operatorname{Im} F(E \pm i0)| = 0(|E|^p) \qquad \text{при } E \to \pm\infty. \tag{21}$$

Заметим, что в /11/ условие (21) было доказано в предположении наличия массовой щели и не более чем линейного экспоненциального роста амплитуды. Тогда амплитуда в комплексной области может быть представлена в виде

$$F(z) = g(z) + \frac{(z - z_0)^{p+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(E + i0)\, dE}{(E - z_0)^{p+2}(E - z)}, \quad z_0 \in (-E_0, E_0), \tag{22}$$

где $g(z)$ – некоторая вещественноподобная целая функция. Интеграл, воспроизводящий скачок амплитуды на вещественной оси, сходится благодаря условию (21) и, подобно интегралу (10), в комплексной области ограничен полиномом степени $p + 1$. Функция $g(z)$ имеет порядок, равный порядку k амплитуды $F(z)$, и следовательно, по упоминавшейся теореме Адамара может быть представлена в виде

$$g(z) = z^s E(z) \exp\{Q(z)\}, \tag{23}$$

где $Q(z)$ – полином степени не выше k; s – порядок нуля функции $g(z)$ в нуле; $E(z)$ – каноническое произведение, построенное по нулям $\{z_n\}$ функции $g(z)$:

$$E(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - z/z_n) \exp\{z/z_n + (z/z_n)^2/2 + \dots + (z/z_n)^\rho/\rho\}. \tag{24}$$

Здесь ρ – род канонического произведения, т.е. наименьшее целое, при котором еще сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (r/|z_n|)^{\rho+1}, \qquad \rho \leqslant k. \tag{25}$$

Соотношение (22) является естественным обобщением обычных дисперсионных соотношений на случай экспоненциального роста амплитуды; в частном случае, когда порядок амплитуды F равен нулю, функция $g(z)$ есть полином с конечным числом неизвестных констант. В случае отличного от нуля (но конечного) порядка амплитуды число констант, входящих в (22), вообще говоря, бесконечно, поскольку $g(z)$ может иметь бесконечное число нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейман Н. Н. ЖЭТФ, 47, 5 (11), 1967 (1964).
2. Fainberg V. Ya., Soloviev M. A. Ann. of Phys., 113, N 2, 421 (1978).
3. Fainberg V. Ya., Soloviev M. A. Comm. Math. Phys., 57, 149 (1977).
4. Lomsadze Yu. M., Sabad E. P. Reports on Math. Phys., 17, N 1, 101 (1980).
5. Ломсадзе Ю. М., Сабад Е. П. УФН, 25, № 10, 1585 (1980).
6. Gross D. J., Mende P. F. Preprint PUPT-1062, Princeton University, 1987.
7. Боголюбов Н. Н. и др. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987, часть V.
8. Файнберг В. Я. Препринт ФИАН № 137, М., 1967.
9. Cornille H., Martin A. Nucl. Phys., B48, N 1, 104 (1972).
10. Титчмарш Е. Теория функций. М., Наука, 1980.
11. Iofa M. Z., Fainberg V. Ya. Nuovo Cimento, A5, 273 (1971); Иофа М.З. ТМФ, № 3, 197 (1970); Файнберг В. Я. в сб. Проблемы теоретической физики, М., Наука, 1972, с. 120.

Поступила в редакцию 2 февраля 1988 г.