

УДК 533.9; 621.039.526

ФОРМИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

А. Р. Каримов¹, В. А. Щеглов

Исследуется влияние малых, но конечных возмущений в начальных условиях на формирование неоднородных структур из гладких и монотонных начальных распределений в системах гидродинамического типа. Рассматриваемая система описывается уравнениями голодной гидродинамики с потенциалом, удовлетворяющим уравнению Пуассона.

Известно, что возникновение сложных динамических структур может порождаться нерегулярным апериодическим поведением макроскопических детерминированных систем. Характерным примером такого поведения является зарождение турбулентности через последовательность бифуркаций, ведущую к странному аттрактору [1]. Хаотичность здесь является следствием сильной зависимости странного аттрактора от начальных условий. Таким образом, хотя начальные условия и являются определяющими в этом сценарии зарождения турбулентности, но их действие проявляется опосредствованно через особенности странного аттрактора. Возможны также стохастические пути самоорганизации в динамических системах – индуцированные шумом переходы [2]. При этом источник шума непосредственно присутствует в динамических уравнениях, а роль начальных условий в эволюции системы незначительна.

Рассмотрим противоположный случай, когда образование сложных структур происходит исключительно под действием начальных условий, на примере модели гидродинамического типа, чья эволюция определяется уравнениями

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nU) = 0, \quad (1)$$

¹Институт высоких температур РАН.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \delta n. \quad (3)$$

Здесь U – гидродинамическая скорость среды, n – ее плотность, Ψ – самосогласованный потенциал системы, $|\delta| = |\lambda| = 1$. Если $\delta\lambda = -1$, то уравнения описывают движение в гравитационном поле, если $\delta\lambda = 1$ – движение однокомпонентной заряженной плазмы. Начальные условия к уравнениям (1) – (3) задаются функциями $n_0(\xi)$ и $U_0(\xi)$ на некотором интервале $-b \leq \xi \leq b$, где b – произвольная постоянная.

Система (1) – (3) при $U_0(\xi) = 0$ и $\delta\lambda = -1$ исследовалась методом годографа в [3, 4], где была показана возможность развития бездиссипативной турбулентности. В [5] для случая $\delta\lambda = 1$ исследовалась эволюция профиля плотности в зависимости от вида начальных условий; показано, что образование волноподобного распределения плотности определяется начальными профилями и их производными. Используя подход, развитый в [5], в общем случае можно установить, что для формирования профиля плотности с числом локальных экстремумов, равным $L_N = 2^{N-1}$, необходимо выполнение условия ($-b \leq \xi \leq b$):

$$U_0^{(k+2)} n_0^{(k+1)} / U_0^{(k+1)} n_0^{(k)} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

где $U_0^{(\alpha)}$ и $n_0^{(\beta)}$ – производные соответствующего порядка начальных функций распределения скорости и плотности. Подчеркнем, что (4) является лишь необходимым условием. Вопрос о достаточных условиях требует отдельного обсуждения.

Покажем, что в данной системе возможно формирование существенно неоднородных структур под действием малых возмущений в гладких и монотонных начальных распределениях (под малыми возмущениями здесь понимаются возмущения, которые оставляют начальные распределения гладкими и монотонными).

В соответствии с общим подходом [6] зависимость плотности от координаты x для любого момента времени t качественно подобна зависимости $n(\tau, \xi)$ в лагранжевых координатах в любой момент времени $t = \tau$. Поэтому информация о характере распределения плотности содержится в производной $\partial n / \partial \xi$, которую в лагранжевых координатах можно записать в виде

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} = \tau n'_0(\xi) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-2} (\tau^{-1} - \theta_0(\xi)), \quad (5)$$

где

$$\theta_0(\xi) = \frac{n_0 U'_0}{n'_0} \left(\frac{U''_0}{U'_0} - \frac{n'_0}{n_0} \right). \quad (6)$$

Из (6) видно, что в классе гладких и монотонных начальных распределений число точек, где функция $n(\xi, \tau)$ имеет экстремумы в момент времени $t = \tau$, совпадает с числом корней алгебраического уравнения

$$\theta_0(\xi) = \tau^{-1}. \quad (7)$$

Число корней (7) определяется видом функции $\theta_0(\xi)$ на интервале $0 \leq \xi \leq b$, которая отражает конкурирующее действие начальных условий и собственного поля системы. Как видно из (6), немонотонность функции $\theta_0(\xi)$ может быть обусловлена немонотонным поведением старших производных от начальных распределений, в частности, немонотонностью производной U_0'' , хотя сами начальные распределения при этом могут быть гладкими и монотонными функциями. Такое поведение функции $\theta_0(\xi)$ порождается, например, начальными условиями вида

$$U_0(\xi) = U_D \xi / L_u + U_F \sin(\xi / L_u), \quad (8)$$

$$n_0(\xi) = n_s [1 + (\xi / L_n)^2]^{-k/2}, \quad (9)$$

где n_s, k, L_u – произвольные положительные константы. Чтобы обеспечить монотонность функции $U_0(\xi)$, положим

$$U_F / U_D \ll 1. \quad (10)$$

В данном случае член $U_F \sin(\xi / L_u)$ следует рассматривать как чрезвычайно малое, но конечное возмущение линейного профиля скорости.

Подставляя (8) и (9) в (6), находим

$$\theta_0(\xi) = \frac{U_D}{L_u} \left[\mu \frac{1 + (\xi / L_n)^2}{\xi / L_n} \sin(\xi / L_u) - \frac{U_F}{U_D} \cos(\xi / L_u) - 1 \right], \quad (11)$$

где

$$\mu = \frac{U_F}{U_D} \frac{L_n}{L_u} \frac{1}{k}.$$

В пределе $\xi \rightarrow 0$ имеем

$$\theta_0(\xi = 0) = \frac{U_D}{L_u} \left[\mu - \frac{U_F + U_D}{U_D} \right],$$

т.е. $\theta_0(0)$ является ограниченной. Для иллюстрации качественного поведения $n(\xi, \tau)$ будем использовать условие (10) вместе с условием $\xi / L_n \gg 1$. Тогда (11) примет более простой вид

$$\theta_0(\xi) = \frac{U_D}{L_u} \left[\mu \frac{\xi}{L_n} \sin(\xi / L_u) - 1 \right]. \quad (12)$$

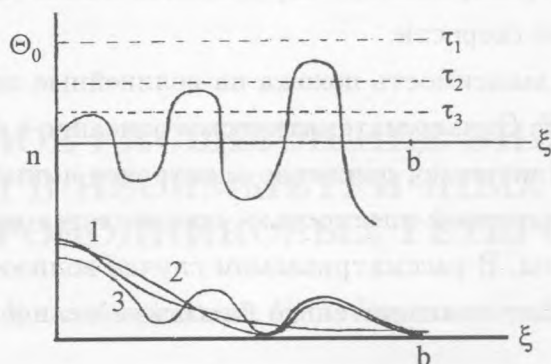


Рис. 1. Плотность n и θ_0 как функции координаты ξ (зависимость $\theta_0(\xi)$ определяется формулой (6)).

Для данного случая качественная зависимость $n(\xi, \tau)$ от ξ для момента времени τ , соответствующая θ_0 , приведена на рис. 1. Как видно из (7) и (12), число точек, где плотность достигает локальных экстремумов, определяется величинами τ и b . Функция $\theta_0(\xi)$ имеет такую форму, что всегда возможно указать τ_1 , для которого (7) не имеет корней на интервале $0 \leq \xi \leq b$ при $\tau < \tau_1$ (кривая 1). В этом случае распределение плотности остается качественно похожим на начальное распределение $n_0(\xi)$. Для момента времени τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$) уравнение (7) имеет, по крайней мере, один корень (кривая 2). Значение τ_2 зависит от b . Очевидно, что для времен $\tau \geq \tau_2$ уравнение (7) всегда имеет корни на интервале $0 \leq \xi \leq b$. В этом случае нетрудно видеть из (7) и (12), что число корней уравнения (7) будет расти с увеличением времени (кривая 3). Однако число корней будет всегда ограниченным для конечного b и $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, начальные гладкие и монотонные распределения (8) и (9) с течением времени превращаются в профили плотности с большим числом локальных экстремумов для времен $\tau \geq \tau_2$.

Данный результат можно интерпретировать следующим образом. Ранее исследованные в [5] зависимости относятся к гладким и строго монотонным начальным распределениям плотности и скорости, чьи производные любого порядка принадлежат к тому же классу. В этом классе начальных условий можно получить не более двух локальных экстремумов. В рассматриваемом случае сами начальные функции являются гладкими и монотонными, тогда как вторая производная скорости является гармонической функцией. Таким образом, первая и вторая производные задают вид функции θ_0 и определяют возможность образования распределения плотности с большим числом экстремумов. В

данном случае волноподобное распределение определяется исключительно характером второй производной начальной скорости.

Представленная на рис. 1 зависимость похожа на нелинейные ленгмюровские колебания однородной плазмы [6, 7]. Однако математическое описание и физическая природа этих явлений – другие. Действительно, движение электронов в плазме, где ионы образуют неподвижный фон с однородной плотностью, определяется инерцией электронов и нелинейной кулоновской силы. В рассматриваемом случае волнообразная форма распределения плотности возникает исключительно благодаря нелинейности движения и влиянию начальных условий.

В заключение отметим еще одну интересную особенность динамики систем, описываемых моделью (1) – (3) с начальными условиями (8) и (9). В данном случае монотонность профиля плотности обусловлена малым, но регулярным возмущением начального профиля плотности, что приводит к монотонному росту амплитуды $\mu\xi/L_n$ по ξ . Следствием этого является последовательное уменьшение координаты новых локальных экстремумов. Однако достаточно предположить, что U_F является не константой, а случайным образом меняющейся функцией на интервале $0 \leq \xi \leq b$ и удовлетворяющей условию (10), чтобы получить нерегулярное появление новых максимумов. В этом случае искажение начального монотонного профиля будет выглядеть как случайный процесс. Таким образом, малое но конечное возмущение в начальных условиях способно привести к хаотизации гладкого и монотонного профиля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р ю э л ь Д., Т а к е н с Ф. О природе турбулентности, в кн. Странные аттракторы. М., Мир, 1981, с. 117.
- [2] Х о р с т х е м к е В. Индуцированные шумом переходы. М., Мир, 1987.
- [3] Г у р е в и ч А. В., З ы б и н К. П. ЖЭТФ, **94**, в. 10, 5 (1988).
- [4] Г у р е в и ч А. В., З ы б и н К. П. ЖЭТФ, **94**, в. 1, 3 (1988).
- [5] К а г и м о в А. R. Physica, **D 102**, 328 (1997).
- [6] D a v i d s o n R. C. Methods in Nonlinear Plasma Theory, New York, Academic Press, 1972.
- [7] K a l m a n G. Ann. Phys., **10**, 1 (1960).

Поступила в редакцию 12 марта 1999 г.