Краткие сообщения по физике № 12-1988 г.

УДК 533. 9

О МЕХАНИЗМЕ НЕЛИНЕЙНОГО НАСЫЩЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В УСЛОВИЯХ АНОМАЛЬНОГО ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА

М.В. Кузелев, Р.В. Романов, А.А. Рухадзе

Изложена аналитическая нелинейная теория излучения волн горячим прямолинейным электронным пучком в постоянном внешнем магнитном поле при неустойчивости в условиях аномального эффекта Доплера. Установлена природа механизма стабилизации неустойчивости, определены максимальные амплитуды излучаемых волн и изучена их динамика.

Помимо кинетических пучковых неустойчивостей типа обратного затухания Ландау с инкрементами, пропорциональными $\partial f/\partial v$ /1/, известны процессы, инкременты которых определяются самой функцией распределения резонансных электронов, например, излучение прямолинейного пучка электронов в постоянном внешнем магнитном поле в условиях аномального эффекта Доплера /2/. Эта неустойчивость развивается, если частота и волновое число удовлетворяют условиям $\omega = kc_0$, $\omega = kv_\parallel - \omega_B$, и в случае горячего пучка имеет инкремент /3/ $\delta\omega = (\pi\omega_b^2\omega_B/2k\omega) f_0(v_p)$, где ω_b и ω_B – электронные ленгмюровская и циклотронные частоты, $f_0(v_\parallel)$ – невозмущенная функция распределения электронов по продольным скоростям $v_\parallel$, $v_p = (\omega + \omega_B)/k$, а фазовая скорость волны c_0 считается меньшей, чем средняя продольная скорость электронов v_p .

Исходим из следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} &dA/dt = -i(\omega_b^2/2\omega)\int f_0(v_0)V(t,v_0)\,dv_0,\\ &dV/dt + i(\omega - kv_\parallel + \omega_B)V = i\omega_B A,\\ &dv_\parallel/dt = -i(k/2)(e/mc)^2(V^*A - VA^*) \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями $A(t=0) = A_0$, $V(t=0)=0$, $v_\parallel(t=0) = v_0$, обобщающей уравнения, полученные в /4/, на случай немоноскоростного пучка. Здесь $A(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда векторного потенциала $A_\perp = A_x + iA_y$, а $V(t,v_0) = (mc/e)v_\perp \exp(-i\omega t + ikz)$, где $v_\perp = v_x + iv_y$ – поперечная компонента скорости. Уравнения записаны в предположении об отсутствии в невозмущенном пучке частиц с поперечными скоростями.

Выясним нелинейный механизм стабилизации кинетической неустойчивости и получим аналитическое решение. Для этого формально решим второе уравнение (1) $V = A\omega_B/(\omega - kv_\parallel + \omega_B)$, где $\omega = \omega - i\partial/\partial t$. Подставляя это выражение в первое уравнение (1), умноженное на A^*, и складывая его с комплексно-сопряженным, получим

$$\frac{d|A|^2}{dt} = \frac{\omega_b^2\omega_B}{\omega|k|}\,|A|^2\int f_0(v_0)\,\frac{\widetilde{\delta}}{[v_p - v_\parallel(t,v_0)]^2 + \widetilde{\delta}^2}\,dv_0, \tag{2}$$

где $\widetilde{\delta} = |k|^{-1}\partial/\partial t$. В рамках кинетического подхода $\widetilde{\delta} \to 0$, что позволяет проинтегрировать (2) по v_0; окончательно получаем

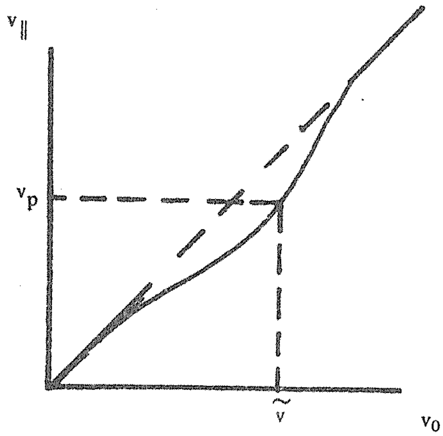
$$d|A|^2/dt = 2\delta\omega_H|A|^2, \tag{3}$$

где

$$\delta\omega_H = \frac{\pi}{2}\,\frac{\omega_b^2\omega_B}{\omega|k|}\,f_0(v_p)\,\frac{f_0(\widetilde{v})}{f_0(v_p)}\,\Big|\,\frac{\partial v_\parallel(\widetilde{v})}{\partial v_0}\Big|^{-1} - \tag{4}$$

нелинейный инкремент, $\tilde{v}$ – корень уравнения $v_p = v_\parallel(t, v_0)$, разрешаемого относительно v_0. При получении (4) учтено, что последнее уравнение в кинетическом режиме скорее всего имеет один корень. В линейном приближении $v_\parallel(t, v_0) = v_0$, значит $\tilde{v} = v_p$, и из (4) следует линейный инкремент $\delta\omega$.

При кинетическом рассмотрении функция распределения в резонансной области $|\delta\omega/k|$ меняется слабо, то есть $f_0(\tilde{v}) \approx f_0(v_p)$. Главный стабилизирующий эффект связан с множителем $|\partial v_\parallel(\tilde{v})/\partial v_0|^{-1}$. Из рис. 1 видно, что производная $\partial v_\parallel/\partial v_0$ при $v_0 = v_p$ больше единицы и растет со временем (она равна единице только при $t = 0$). Это приводит к уменьшению инкремента. Физический смысл состоит в том, что электроны с резонансным значением скорости передают энергию волне и тормозятся. В результате на функции распределения при $v_\parallel = v_p$ образуется провал, а при меньших скоростях – пик, причем уменьшение числа резонансных электронов стабилизирует неустойчивость.



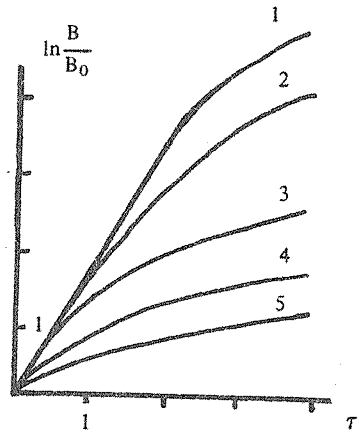


Рис. 1. Качественная зависимость $v_\parallel(v_0)$ в момент времени t и нахождение корня уравнения $v_p = v_\parallel(t, v_0)$.

Рис. 2. Динамика нарастания амплитуды волны при различных начальных условиях: $B_0 = 0{,}01$ (1); 0,1 (2); 0,5 (3); 1 (4); 2 (5).

Сформулируем упрощенные уравнения. Подстановка формального решения для V в последнее уравнение (1) дает

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = -\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{k\omega_B\delta\omega}{[\omega + \omega_B - kv_\parallel(t, v_0)]^2 + \delta\omega^2}\,|A|^2. \tag{5}$$

Система (3), (4), (5) является замкнутой. В безразмерных переменных $\tau = \delta\omega t$, $x_{\parallel,0,p} = kv_{\parallel,0,p}/\delta\omega$, $B = (e/mc)^2(k\omega_B/\delta\omega^3)|A|^2$ получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dB}{d\tau} = 2\left|\frac{\partial x_\parallel}{\partial x_0}(\tilde{x})\right|^{-1} B, \quad \frac{dx_\parallel}{d\tau} = -\frac{B}{[x_p - x_\parallel(\tau, x_0)]^2 + 1} \tag{6}$$

и начальных условий $B(\tau = 0) = B_0$, $x_\parallel(\tau = 0) = x_0$, причем $\tilde{x}$ – корень уравнения $x_p = x_\parallel(\tau, x_0)$. При решении (6) возможны дальнейшие упрощения. Во-первых, без ограничения общности можно положить $x_p = 0$, что соответствует изменению начала отсчета в пространстве скоростей. Во-вторых, введя новую функцию $B = da/d\tau$, проинтегрируем второе уравнение системы (6), что дает

$$x_\parallel^3/3 + x_\parallel - x_0^3/3 - x_0 = -a. \tag{7}$$

Поскольку $x_p = 0$, то корень $\tilde{x}$ определяется из уравнения $x_\parallel(\tau, x_0) = 0$. Полагая далее $x_0 = \tilde{x}$, получим

$$\tilde{x} + \tilde{x}^3/3 = a. \tag{8}$$

Дифференцируя далее (7) по x_0, подставляя в результат вместо x_0 величину $\tilde{x}$, перепишем первое уравнение системы (6) в виде

$$B = \frac{da}{d\tau} = 2\int_0^a \frac{da'}{1 + \tilde{x}(a')^2} + B_0, \tag{9}$$

где $\tilde{x}$ определяется из уравнения (8), а $a(\tau = 0) = 0$. При достаточно малых a (а только при таких a упрощенной системой (6) можно пользоваться) уравнение (9) упрощается:

$$B = \operatorname{arctg} a + B_0. \tag{10}$$

Отсюда видно, что $B_{max} \sim 1$ при $B_0 \ll 1$. Дальнейшее аналитическое интегрирование невозможно, однако уже в рамках грубой модели (6) удается описать стабилизацию неустойчивости, обусловленную обеднением функции распределения при скоростях , близких к v_p. В линейном приближении из (10) следует, что $B = B_0 \exp(2\tau)$, как это и должно быть при $B_0 \ll 1$. Если же $B_0 \gg 1$, то $B \approx B_0$, то есть излучение в условиях аномального эффекта Доплера незначительно. На рис. 2 приведен результат численного интегрирования уравнения (10) для различных B_0, который подтверждает вышесказанное. При малых B_0 нарастание волны долгое время остается экспоненциальным. При больших B_0 начальный экспоненциальный участок быстро сменяется более пологим.

Уравнение (10) не описывает полного насыщения амплитуды B. С некоторого момента экспоненциальный закон изменения амплитуды сменяется существенно более медленным. Отсутствие полного насыщения является следствием приближений, сделанных при выводе этого уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
2. М и х а й л о в с к и й А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, Неустойчивости однородной плазмы. М., Атомиздат, 1975.
3. С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961.
4. Б о г д а н о в А. Т., Кузелев М. В., Р у х а д з е А. А. Изв. ВУЗов, сер. Радиофизика, **29**, 1431 (1986).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 22 июня 1988 г.