Краткие сообщения по физике № 12-1988 г.

УДК 530.145

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

А.В. Турбинер, А.Г. Ушверидзе

Построены три класса точных решений для дискретного спектра двумерного уравнения Шредингера с полиномиальными потенциалами специального вида.

В последнее время резко возрос интерес к поиску точнорешаемых задач квантовой механики, не допускающих решения в рамках метода факторизации /1, 2/. В /3/ найдены первые точные решения для некоторых состояний одномерных квантовомеханических задач с полиномиальными потенциалами. Итогом последующего развития был вывод о существовании полиномиальных потенциалов, для которых возможно явное построение не только волновых функций отдельных уровней, но и целых участков дискретного спектра /4/.

В настоящей работе предлагается регулярный метод построения двумерных точнорешаемых задач полиномиального типа. Метод основан на совершении конформного преобразования специального вида над уравнением Шредингера

$$(-\Delta + V)\psi = E\psi.$$

Будет рассмотрено два случая: 1) когда в уравнении Шредингера энергия фиксирована (ищется отдельная точка спектра) и 2) когда энергия произвольна (ищется весь спектр).

Первый случай. Без потери общности полагаем $E = 0$, что соответствует выбору точки отсчета. Конформное преобразование $\xi = f(z)$, $\xi = u + iv$, $z = x + iy$ переводит оператор Лапласа из одной ортогональной системы координат в другую:

$$\Delta_{x,y} = F\Delta_{u,v}, \quad F = |f'(z)|^2. \tag{1}$$

Тогда уравнение Шредингера в координатах u, v имеет вид:

$$(-\Delta_{u,v} + V/F)\psi = 0. \tag{2}$$

Условием разделения переменных в /5/ является требование

$$V = F(A(u) + B(v)), \tag{3}$$

где $A(u)$ и $B(v)$ – произвольные функции. Рассмотрим случай, когда $f(z)$ – полином. В силу (1), (2) функция F, а также новые координаты u, v будут полиномами в переменных x, y. Если потребовать полиномиальности функций $A(u)$ и $B(v)$, то и исходный потенциал $V(x, y)$ будет полиномом по переменным x, y. Задача решения исходного уравнения Шредингера сводится к решению двух несвязанных одномерных уравнений Шредингера

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + A(u)\right]\varphi(u) = 0, \quad \left[-\frac{\partial^2}{\partial v^2} + B(v)\right]\chi(v) = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим частный случай $f = z^2$ $(u = x^2 - y^2,\ v = 2xy)$. Пусть $A(u) = u^2/4 - \alpha$, $B(v) = (1 + \alpha^2)v^2/16 - \beta$. Тогда (4) является уравнениями Шредингера для гармонических осцилляторов (со спектральными параметрами α и β), решение которых известно. В исходных переменных потенциал

$$V = x^6 + y^6 + (a^2 + 2a)(x^4y^2 + x^2y^4) + [a - 3 - 4((1 + a)n/2 + m)](x^2 + y^2), \tag{5}$$

где a имеет смысл параметра асимметрии. Волновые функции, соответствующие этому потенциалу, суть

$$\psi(x, y) = H_n(\sqrt{1+a}\,xy)H_m((x^2 - y^2)/\sqrt{2})\exp[-(x^4 + y^4 + 2ax^2y^2)/4], \tag{6}$$

где H_n – полиномы Эрмита. Когда a – рациональное число, возникает вырождение, кратность которого дается числом решений диофантова уравнения $(1 + a)n/2 + m = \text{const}$. Кратность вырождения для возбужденных уровней в произвольном потенциале вида (5) равна двум. Однако в вышеуказанном случае рациональных a она может быть выше, что, по-видимому, указывает на существование дополнительных интегралов движения. Узловые поверхности функций (6) представляют собой гиперболы $x^2 - y^2 = \text{const}$, $2xy = \text{const}/\sqrt{1 + a}$. Видно, что узловые поверхности первого типа не деформируются при изменении параметра асимметрии a. Полиномиальные потенциалы более высоких степеней получаются двумя способами: взятием в качестве $f(z)$ полинома более высокой степени или увеличением степени полиномов $A(u)$, $B(v)$.

Второй случай. Полагаем $E \neq 0$. Совершая конформное преобразование типа (7), получаем уравнение Шредингера следующего вида:

$$(-\Delta_{u,v} + V/F - E/F)\psi = 0. \tag{7}$$

Для разделения переменных в (7) помимо условия (3) требуется выполнение условия

$$F^{-1} = a(u) + b(v), \tag{8}$$

где $a(u)$ и $b(v)$ – некоторые функции. В результате возникает следующая система уравнений, аналогичная (6):

$$\begin{gathered}
[-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + A(u)]\varphi(u) = Ea(u)\varphi(u) + \Gamma\varphi(u), \\
[-\frac{\partial^2}{\partial v^2} + B(v)]\chi(v) = Eb(v)\chi(v) - \Gamma\chi(v),
\end{gathered} \tag{9}$$

где E – спектральный параметр исходного уравнения Шредингера, а Γ – константа разделения, играющая роль дополнительного спектрального параметра в совместной системе (9).

Условие (8) эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F^{-1} = \left(\frac{\partial^2}{\partial f^2} - \frac{\partial^2}{\partial f^{*2}}\right)\frac{1}{f'(z) f^{*\prime}(z^*)} = 0. \tag{10}$$

Легко убедиться, что в (10) выполняется в двух случаях:

$$\xi = f(z) = \sqrt{z}, \tag{11а}$$

$$\xi = f(z) = \operatorname{Arcsh} z. \tag{11б}$$

Эти решения определены с точностью до произвольных трансляций, дилатаций и поворотов переменных z и ξ. Условия (11а, б) однозначно фиксируют переменные u, v, а также функции $a(u)$ и $b(v)$ в (9)

$$u=\sqrt{(r+x)/2},\ v=\sqrt{(r-x)/2},\ a(u)=u^2,\ b(v)=v^2, \tag{12а}$$

$$u=\mathrm{Arcch}\,[(S_+ + S_-)/2],\ v=\mathrm{Arcsin}\,[(S_+ - S_-)/2],\ a(u)=\mathrm{ch}^2 u,\ b(v)=\sin^2 v, \tag{12б}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $S_\pm=\sqrt{(x\pm 1)^2+y^2}$. Вид $A(u)$ и $B(v)$ фиксируется требованием полиномиальности потенциала исходной задачи. Рассмотрим отдельно случай (12а). Здесь

$$A(u)=\sum_{n=3}^{N} c_n u^{2n},\quad B(v)=\sum_{n=3}^{N} c_n v^{2n}, \tag{13}$$

где c_n – произвольные коэффициенты. Простейший нетривиальный частный случай возникает при $N=5/A(t)=B(t)=16t^{10}+4ct^6$, при этом потенциал

$$V(x,y)=16x^4+12x^2y^2+y^4+c(4x^2+y^2).$$

Волновые функции даются произведением решений уравнений (10) с учетом (12а) и (13). В этом случае фиксирован вид асимметрии в старшей нелинейности потенциала. Узловые поверхности $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ представляют собой софокусные параболы. Преобразование (11а) описывает переход к параболическим координатам. Рассмотрим случай (12б):

$$A(u)=\sum_{n=1}^{N} c_n \mathrm{ch}^{2n}u,\quad B(v)=-\sum_{n=1}^{N} c_n \sin^{2n}v.$$

Простейший нетривиальный потенциал возникает при $N=3/A(t)=-B(t)=t^6+ct^4$ и дается формулой

$$V(x,y)=(x^2+y^2)^2/4+(c+1/2)(x^2+y^2)-x^2/2. \tag{14}$$

Старшая степень потенциала отвечает сферической симметрии, а константа c играет роль параметра асимметрии. Узловые поверхности волновых функций даются уравнениями $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ и представляют собой софокусные эллипсы и гиперболы. Преобразование (11б) описывает переход к эллиптическим координатам.

В многомерном случае переменные в уравнении Шредингера разделяются в обобщенных эллипсоидальных координатах для широкого класса полиномиальных потенциалов. Простейшими потенциалами такого типа являются

$$V=\beta\Big(\sum_{i=1}^{D} x_i^2\Big)^2+\sum_{i=1}^{D}\beta_i x_i^2,\quad D\geqslant 0, \tag{15}$$

где β, β_i – некоторые параметры. Формула (15) представляет собой естественное обобщение (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Infeld L., Hull T. E. Rev. Mod. Phys., 23, 21 (1951).
2. Гендештейн Л. Э. Письма в ЖЭТФ, 38, 299 (1983); Андрианов А. А. и др. ТМФ, 61, 17 (1984).
3. Biswas S. N., Datta K., Singh V. Phys. Rev., D18, 1901 (1978); Flessas G. F. Phys. Lett., 72A, 289 (1979); Турбинер А. В. Письма в ЖЭТФ, 30, 379 (1979).
4. Гершензон М. Е., Турбинер А. В. ЯФ, 35, 1437 (1982).

Поступила в редакцию 13 июля 1988 г.