Краткие сообщения по физике № 4-1989 г.

УДК 530. 145

КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ МАССИВНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МАССИВНОГО ПОЛЯ ЯНГА – МИЛЛСА

Т.Е. Фрадкина

Построены квантовые калибровочные модели массивной электродинамики и массивного поля Янга – Миллса, эквивалентные соответствующим стандартным массивным теориям в рамках расширенного конфигурационно-пространственного описания.

Массивные поля Янга – Миллса и электродинамики представляют собой теории со связями второго рода. Нарушение калибровочной симметрии в них, вызванное формальным введением массивного члена, приводит к осложнениям в процедуре операторного квантования и последующего квантового описания полей. Метод аналогового описания теорий со связями второго рода позволяет решить проблему операторного квантования, а также построить адекватный вычислительный аппарат вне массовой оболочки для такого класса теорий.

Метод аналогового калибровочного описания и последующего операторного обобщенного канонического квантования теорий со связями второго рода в рамках неабелевой калибровочной реализации развит в /1, 2/, аспекты абелева калибровочного описания и конкретные примеры применения метода изложены в /3, 4/. В настоящей статье построены квантовые калибровочные модели массивной электродинамики и массивного поля Янга – Миллса, эквивалентные соответствующим теориям в расширенной пространственно-временной реализации.

Калибровочный вариант массивной электродинамики. Массивная электродинамика описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}/4 - m^2\hat{A}_\mu\hat{A}_\mu/2, \ \hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu. \tag{1}$$

Присутствующие в теории (1) связи второго рода имеют вид:

$$\hat{T}_1 = \partial_i\hat{p}_i - m^2\hat{A}_0, \quad \hat{T}_2 = \hat{p}_0. \tag{2}$$

При этом матрица связей (2) представляет собой постоянную симплектическую матрицу

$$\|W_{ij}\| = i\hbar\begin{vmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Для получения аналоговой калибровочной модели /4/ вводятся дополнительные поля бозе-статистики, удовлетворяющие следующим соотношениям коммутации:

$$[\hat{\Phi}^1, \hat{\Phi}^2] = i\hbar/m^2, \quad [\hat{\Phi}^2, \hat{\Phi}^1] = -i\hbar/m^2, \quad [\hat{\Phi}^1, \hat{\Phi}^1] = [\hat{\Phi}^2, \hat{\Phi}^2] = 0. \tag{4}$$

Новые связи уже первого рода в расширенном дополнительными полями фазовом пространстве с учетом (3) и (4) имеют вид:

$$\hat{T}_1' = \partial_i\hat{p}_i - m^2\hat{A}_0 - m^2\hat{\Phi}^2, \quad \hat{T}_2' = \hat{p}_0 + m^2\hat{\Phi}^1. \tag{5}$$

Гамильтониан калибровочной аналоговой теории представляет собой вейлевскую нормальную форму по дополнительным полям $\hat{\Phi}^a$ от соответствующего операторного символа $\hat{H}(\varphi)$

$$\hat{H}' = :\hat{H}(\hat{\Phi}): \equiv \hat{H}(\varphi) \exp [\overleftarrow{\partial^r} \hat{\Phi}^a / \partial\varphi^a] \Big|_{\varphi^a = 0}, \tag{6}$$

где $\hat{H}(\varphi)$ является решением дифференциального уравнения по с-числовому параметру φ^a

$$\partial^r \hat{H} / \partial\varphi^a = (i\hbar)^{-1} [\hat{H}, \hat{T}_a]. \tag{7}$$

Гамильтониан как решение уравнений (6), (7) равен:

$$\hat{H}' = \hat{p}_i^2/2 + \hat{F}_{ij}^2/4 - \hat{A}_0 \partial_i \hat{p}_i - \hat{\Phi}^2 \partial_i \hat{p}_i + (m^2/2)(\hat{A}_0 + \hat{\Phi}^2)^2 - (m^2/2)(\hat{A}_i - \partial_i \hat{\Phi}^1)^2. \tag{8}$$

Эффективный лагранжиан калибровочной модели массивной электродинамики имеет вид:

$$\hat{\mathcal{L}}' = -(1/4) F_{\mu\nu}^2 + (m^2/2)(\hat{\Phi}^2)^2 + (m^2/2)\hat{\Phi}^2 \partial_0 \hat{\Phi}^1 - (m^2/2)\hat{\Phi}^1 \partial_0 \hat{\Phi}^2 + \tag{9}$$
$$+ m^2 \partial_0 \hat{\Phi}^1 \hat{A}_0 - (m^2/2)\hat{A}_0^2 + (m^2/2)(\hat{A}_i - \partial_i \hat{\Phi}^1)^2.$$

Квантовая S-матрица в расширенном конфигурационном пространстве в лоренцевой калибровке $\partial_\mu \hat{A}_\mu = 0$ приобретает вид:

$$Z = \int DA_\mu D\Phi^1 D\Phi^2 DCD\bar{C} \exp\left\{ (i/\hbar) \int dt \, [\mathcal{L}'(A_\mu, \Phi^1, \Phi^2) + \bar{C}\Box C] \right\}. \tag{10}$$

Эффективный лагранжиан теории принимает компактный вид в случае выбора дополнительных полей $\hat{\Phi}^1 = -\hat{\Phi}$, $\hat{\Phi}^2 = -\hat{\pi}_\Phi / m^2$:

$$\hat{\mathcal{L}}'(\hat{A}_\mu, \hat{\Phi}) = -(1/4)\hat{F}_{\mu\nu}^2 - (m^2/2)(\hat{A}_\mu + \partial_\mu \hat{\Phi})^2. \tag{11}$$

Калибровочная модель массивного поля Янга – Миллса. Лагранжиан массивной теории Янга – Миллса имеет вид:

$$\mathcal{L} = -(1/4)(\hat{F}_{\mu\nu}^a)^2 - (m^2/2)(\hat{A}_\mu^a)^2, \quad F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu^a - \partial_\nu \hat{A}_\mu^a + g f^{abc} \hat{A}_\mu^b \hat{A}_\nu^c. \tag{12}$$

Связи второго рода, присутствующие в теории (1), имеют вид

$$\hat{T}_1^a = \hat{\nabla}_i^{aa_1} \hat{p}_i^{a_1} - m^2 \hat{A}_0^a, \quad \hat{T}_2^a = \hat{p}_0^a, \tag{13}$$

где ковариантная производная стандартно определена: $\hat{\nabla}_i^{aa_1} \equiv \delta^{aa_1} \partial_i + g f^{aa_1 b} \hat{A}_i^b$. Матрица связей (13) определена соотношением

$$\|W^{ab}\| = i\hbar \begin{vmatrix} g(\hat{\nabla}_i^{cc_1} \hat{p}_i^{c_1}) f^{cab} & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Калибровочный вариант массивного поля Янга – Миллса, как можно показать, представлен лагранжианом

$$\mathcal{L} = -(1/4)(\hat{F}_{\mu\nu}^a)^2 - (m^2/2)\,\mathrm{tr}(\hat{A}_\mu^{[s]})^2, \tag{15}$$

где в массивном члене присутствует калибровочно-преобразованное векторное поле $\hat{A}_\mu^{[s]}$:

$$\hat{A}_\mu^{[s]} = \hat{S}\hat{A}_\mu \hat{S}^{-1} - (i/g)\,\partial_\mu \hat{S}\hat{S}^{-1}, \quad \hat{A}_\mu = \tau_a \hat{A}_\mu^a. \tag{16}$$

Выражая киральный ток $\hat{L}_\mu^a = (i/g)\,\hat{S}^{-1}\partial_\mu \hat{S}$, $\hat{S} = \hat{S}(\hat{\varphi})$, через соответствующий репер калибровочного преобразования

$$\hat{e}_a = \tau_b \hat{e}_a^b, \ \hat{e}_a = (i/g)\,\hat{S}^{-1} \ \partial\hat{S}/\partial\hat{\varphi}^a \ , \tag{17}$$

имеем следующее выражение для лагранжиана теории:

$$\mathcal{L} = -(1/4)\,(\hat{F}_{\mu\nu}^a)^2 - (m^2/2)\,(\hat{A}_\mu^a - \hat{e}_b^a \partial_\mu \hat{\varphi}^b)^2 . \tag{18}$$

При этом калибровочный репер удовлетворяет следующим групповым уравнениям:

$$\begin{gathered} \partial \hat{e}_b^a/\partial\hat{\varphi}^c - \partial\hat{e}_c^a/\partial\hat{\varphi}^b + g f^{abc} \hat{e}_c^m \hat{e}_b^n = \hat{0}, \\ \frac{\partial(\hat{e}^{-1})_p^d}{\partial\hat{\varphi}^c}\,(\hat{e}^{-1})_g^c - \frac{\partial(\hat{e}^{-1})_g^d}{\partial\hat{\varphi}^c}\,(e^{-1})_p^c = -(\hat{e}^{-1})_a^d g f^{apg}, \end{gathered} \tag{19}$$

где $\hat{e}_b^a (\hat{e}^{-1})^b{}_d = \delta^a{}_d \hat{1}$. Получающиеся связи первого рода в теории $\hat{T}^a$ имеют вид:

$$\hat{T}^a = \hat{\nabla}_i^{aa_1} p_i^{a_1} - (\hat{e}^{-1})_a^b \hat{\pi}_b , \tag{20}$$

где $\hat{\pi}_b \equiv \hat{\pi}_{\varphi^b}$; $[\hat{\varphi}^b, \hat{\pi}_a] = i\hbar\delta^b{}_a \hat{1}$. Роль лагранжевых множителей при этих связях будут играть поля $\hat{A}_0^a$, поскольку $\hat{p}_0^a = \hat{0}$. Связи (20) находятся в инволюции $[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = g\hat{T}^c f^{cab}$, что является следствием групповых соотношений (19). Гамильтониан калибровочной модели массивного поля Янга – Миллса имеет вид:

$$\begin{gathered} \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{A}_0^a \hat{T}^a, \\ \hat{H}_0 = (1/2)\,(\hat{p}_i^a)^2 + (1/4)\,(F_{ik}^a)^2 + (m^2/2)\,(\hat{A}_i^a - \hat{e}_b{}^a \partial_i \hat{\varphi}^b)^2 + (1/2m^2)\,\hat{\pi}_a (\hat{g}^{-1})^{ab} \hat{\pi}_b, \end{gathered} \tag{21}$$

где метрика $\hat{g}_{ab}$ и обратная ей величина $(\hat{g}^{-1})^{ab}$ определены выражениями $\hat{g}_{ab} = \hat{e}^c{}_a \hat{e}_b^c$, $(\hat{g}^{-1})^{ab} = (\hat{e}^{-1})_c^a (\hat{e}^{-1})^b{}_c$. Второе уравнение инволюции с учетом (20), (21) дает $[\hat{H}, \hat{T}^a] = \hat{0}$. Квантовая S-матрица калибровочного варианта массивного поля Янга – Миллса имеет следующий вид в ковариантной по внешним полям калибровке Де-Витта:

$$\begin{aligned} Z = \int DA_\mu^a D\varphi^b D\Pi_a D\bar{C} DC \exp\Big\{ (i/\hbar) \int dt \ [&-(1/4)\,(F_{\mu\nu}^a)^2 - (m^2/2)\,(A_\mu^a - e_b{}^a \partial_\mu \varphi^b)^2 + \\ &+ \Pi_a \tilde{\nabla}_\mu^{ab} A_\mu^b + \bar{C}_a \tilde{\nabla}_\mu^{aa_1} \nabla_\mu^{a_1 b} C^b] \Big\} , \end{aligned} \tag{22}$$

где $\tilde{\nabla}_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab}\partial_\mu + g f^{abc} A_{\text{вн}\,\mu}{}^c$, $A_{\text{вн}} = \langle \hat{A} \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batalin I. A., Fradkin E. S. Preprint FIAN No 132, M., 1986.
2. Batalin I. A., Fradkin E. S. Nuclear Physics, B279, 514 (1987).
3. Фрадкина Т. Е. Препринт ФИАН № 130, М., 1988.
4. Фрадкина Т. Е. Ядерная физика, 49, № 2, 598 (1989).

Поступила в редакцию 16 ноября 1988 г.