Краткие сообщения по физике № 4-1989 г.

УДК 530. 145

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТЬ

А.Г. Ушверидзе

Дается алгебраическая формулировка метода построения точнорешаемых (ТР) и квазиточнорешаемых (КТР) спектральных уравнений. Метод используется для нахождения новых ТР и КТР моделей.

Пусть V и V_n — бесконечномерное и n-мерное векторные пространства, X — линейный оператор из V в V, $\vec{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}^n$ — линейный векторный оператор из V в $V \times V_n$. Рассмотрим уравнение $(X + \vec{e}\,\vec{Y})\varphi = 0$, $\varphi \in \Omega \subset V$, в котором $\vec{e} = \{e_1, \dots, e_n\} \in V_n$ — векторный спектральный параметр, $\Omega = \cup\,\Omega_M$ $(M = 0, \dots, \infty)$ — объединение d_M-мерных поверхностей в V. Если при явном задании Ω это уравнение имеет решения во всех (или в некоторых) Ω_M, то назовем его ТР (или КТР) n-параметрическим спектральным уравнением в Ω, сокращенно: $ТРСУ_n(\Omega)$ (или $КТРСУ_n(\Omega)$). Спектр такого уравнения может быть как непрерывным, так и дискретным.

Теорема 1. $ТРСУ_n(\Omega)$ ($КТРСУ_n(\Omega)$) эквивалентно n-параметрическому семейству $ТРСУ_1(\bar{\Omega})$ ($КТРСУ_1(\bar{\Omega})$), $\bar{\Omega} = \Omega \times \dots \times \Omega$ (n раз).

Доказательство. Пусть $\mathbf{V} = V \times \dots \times V$ (n раз), $\vec{\mathbf{X}} \equiv \{I \times \dots \times I \times X \times I \times \dots \times I\}$ (X на i-м месте, i = 1, ... , n), $\mathbf{Y} \equiv \{I \times \dots \times I \times \vec{Y} \times I \times \dots \times I\}$ ($\vec{Y}$ на i-м месте, i = 1, ... , n) — операторы из $\mathbf{V}$, $\mathbf{V} \times V_n$ в $\mathbf{V} \times V_n$; $\vec{L} \equiv \mathbf{Y}^{-1}\vec{\mathbf{X}}$. Тогда справедливы равенства $\vec{L}\Phi = \vec{e}\,\Phi$, $\Phi = \varphi \times \dots \times \varphi$ (n раз) $\in \bar{\Omega} \subset \mathbf{V}$, означающие, что обычные спектральные уравнения для компонент оператора $\vec{L}$ и любых их линейных комбинаций $H = \vec{\gamma}\vec{L}$ являются ТР (КТР) уравнениями в $\bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Из коммутативности компонент $\vec{Y}$ следует коммутативность компонент $\vec{L}$. Задача перехода от $СУ_n(\Omega)$ к $СУ_1(\bar{\Omega})$ есть обратная задача разделения переменных. Компоненты $\vec{e}$ играют роль констант разделения, а компоненты $\vec{L}$ — роль операторов симметрии уравнения.

Назовем множество решений $ТРСУ_n(\Omega)$ n/m-вырожденным, если для соответствующих $\vec{e}$ имеет место разложение $\vec{e} = \vec{e}\,' \oplus \vec{e}\,''$, где $\vec{e}\,' \in V'_m$, а $\vec{e}\,'' \in V''_{n-m}$ — постоянный вектор. Из соответствующего разложения $\vec{L} = \vec{L}\,' \oplus \vec{L}\,''$ видно, что спектры компонент $\vec{L}\,''$ на рассматриваемых решениях вырождены, а спектры компонент $\vec{L}\,'$ — нет. Это значит, что существует группа симметрии G, относительно которой операторы $\vec{L}\,''$ инвариантны, а операторы $\vec{L}\,'$ — нет.

Теорема 2. На n/m-вырожденном множестве всех (некоторых) решений $ТРСУ_n(\Omega)$ эквивалентно $ТРСУ_m(\Omega)$ и $ТРСУ_1(\bar{\Omega})$ ($КТРСУ_m(\Omega)$ и $КТРСУ_1(\bar{\Omega})$), $\bar{\Omega} = \Omega \times \dots \times \Omega$ (m раз).

Теоремы 1 и 2 являются основными теоремами предлагаемого метода конструирования ТР и КТР моделей, сводящегося 1) к построению многопараметрических ТРСУ, 2) к исследованию вырождений в их спектрах, 3) к переходу к обычным, однопараметрическим СУ.

Для демонстрации метода рассмотрим случай, когда V — пространство функций одной переменной λ, $X = \partial^2/\partial\lambda^2$, $n = 2N$, $\vec{Y} = \{(\lambda - a_1)^{-1}, \dots, (\lambda - a_N)^{-1}, (\lambda - a_1)^{-2}, \dots, (\lambda - a_N)^{-2}\}$. Если Ω_M суть N + M-параметрическое семейство функций вида $\varphi(\lambda) = (\lambda - a_1)^{\eta_1} \times \dots \times (\lambda - a_N)^{\eta_N} \times (\lambda - \xi_1) \times \dots \times (\lambda - \xi_M)$, то система спектральных уравнений имеет вид: $\Sigma'_k(\xi_i - \xi_k)^{-1} + \Sigma_\alpha \eta_\alpha(\xi_i - a_\alpha)^{-1} = 0$, $i = 1, \dots, M$; $e_\alpha = -2\Sigma'_i \times \eta_\alpha(\xi_i - a_\alpha)^{-1} - 2\Sigma'_\beta \eta_\alpha\eta_\beta(a_\alpha - a_\beta)^{-1}$, $e_{\alpha+N} = -\eta_\alpha(\eta_\alpha - 1)$, $\alpha = 1, \dots, N$. Поскольку число неизвестных (M + 3N) превышает число уравнений (M + 2N), то спектр рассматриваемого $ТРСУ_{2N}(\Omega)$ непрерывный. Для обеспечения его дискретности достаточно потребовать 2N/N-вырожденности всех решений, т. е. постоянства $\vec{e}\,''$ в разложении $\vec{e} = \vec{e}\,' \oplus \vec{e}\,''$, $\vec{e}\,' \in V'_N$, $\vec{e}\,'' \in V''_N$. В результате получаем $ТРСУ_N(\Omega)$ с дискретным спектром. Характер вырождения этого спектра, а также его участков сильно зависит от конкретного выбора разложения $\vec{e} = \vec{e}\,' \oplus \vec{e}\,''$.

В общем случае, в силу тождества $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} e_\alpha = 0$, все решения полученного ТРСУ$_N(\Omega)$ $N/(N-1)$-вырождены. Это приводит к множеству $N-1$-мерных ТР уравнений Шредингера на, вообще говоря, кривых многообразиях, которые легко могут быть построены с помощью явных формул работы /1/. В частности, при $N = 2$ возникают одномерные ТР модели, как перечисленные в /2/, так и более общие, связанные с гипергеометрическим уравнением /3/. Более сильное вырождение возникает при специальном выборе разложения $\vec{e}$. Фиксация всех $e_{\alpha+N}$, $\alpha = 1, \ldots, N$ обеспечивает $N/(N-2)$-вырождение для $(M+N-2)!\,[M!(N-2)!]^{-1}$ решений при каждом M. Это приводит к широкому классу $N-2$-мерных КТР моделей. В частности, при $N = 3$ возникают одномерные КТР модели, описанные в /2/. Другой выбор разложения $\vec{e}$, основанный на фиксации $e_{\alpha+N}$, $\alpha = 1, \ldots, N-1$ и занулении комбинации $\sum\limits_{\alpha=1}^{N}(a_\alpha e_\alpha + e_{\alpha+N})$, обеспечивает $N/(N-2)$-вырождение для всех решений ТРСУ$_N(\Omega)$. Это приводит к $N-2$-мерным ТР моделям. В частности, при $N = 3$ возникают одномерные ТР модели, ошибочно отнесенные в /4/ к классу КТР моделей с конечным числом расплетенных уровней. В действительности, весь спектр в этих моделях расплетен (этот факт не может быть легко установлен в рамках метода работы /4/).

В качестве примера приведем явный вид гамильтонианов ТР и КТР моделей, возникающих при фиксации всех $e_{\alpha+N}$, $\alpha = 1, \ldots, N$ в предположении, что все a_α вещественны и расположены в порядке возрастания:

$$H = -\sqrt{g} \sum_{i,k=1}^{D} \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{g^{ik}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\lambda_k}\right) + W, \quad g = \det\|g^{ik}\|, \tag{1}$$

$$W = -\sum_{i=1}^{D} g^{ii}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} r_n \lambda^{n-D}\Big(\prod_{\alpha=D+1}^{N}(\lambda_i - a_\alpha)\Big)^{-1} + (\omega^2 g)^{1/4}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i^2}(\omega^2 g)^{-1/4}\right\} -$$

$$-\sum_{i=1}^{D}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(\omega g^{ii})\right]\left[(\omega^2 g)^{1/4}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(\omega^2 g)^{-1/4}\right], \tag{2}$$

$$\omega \sim \prod_{i<k}^{D}(\lambda_i - \lambda_k) \prod_{i=1}^{D}\left\{\prod_{\alpha=1}^{N}(\lambda_i - a_\alpha)^{2\eta_\alpha - 1}\right\}, \tag{3}$$

$$g^{ii} = \prod_{\alpha=1}^{N}(\lambda_i - a_\alpha)\left\{\prod_{k=1}^{D}{}'(\lambda_i - \lambda_k)\right\}^{-1} \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sum_{n=1}^{D}\gamma_n\sigma_n(\lambda), \quad g^{ik} = 0,\ i \neq k. \tag{4}$$

Здесь $\sigma_n(\lambda)$ – симметрические полиномы от $\{\lambda_i\}_{i=1}^{D}$, γ_n – произвольные константы (см. конец доказательства теоремы 1), а r_n – спектральные параметры, являющиеся линейными комбинациями спектральных параметров e_α, $\alpha = 1, \ldots, N$. Заметим, что $r_{N-1} \equiv 0$, а r_{N-2} зависит только от параметров a_α, η_α (последние фиксированны) и M. Поэтому при $D = N-1$ возникают ТР, а при $D = N-2$ – КТР уравнения шредингеровского типа в D-мерном кривом пространстве. При $\gamma_n = \delta_{n1}$ возникает частный случай этих уравнений, рассматривавшийся в работе /5/. Спектры описываемых формулами (1) – (4) ТР моделей полностью расплетаются при $\gamma_n = \delta_{n1}$. В общем случае произвольных γ_n сплетенными являются лишь уровни, относящиеся к одному и тому же значению M. Для эллиптичности уравнения с гамильтонианом (1) необходимо, чтобы: 1) физические интервалы (т. е. интервалы, ограниченные точками a_α и $\pm\infty$ и занятые переменными λ_i /5/) были либо соседними, либо заключали между собой четное число нефизических (пустых) интервалов, 2) все константы γ_n были неотрицательными, 3) интервал $[-\infty, a_1]$ был нефизическим. Эрмитовость гамильтониана (1) на решениях, получаемых из системы спектральных уравнений, обеспечивается требованием $\eta_\alpha > 1/2$ на границах физических интервалов, а также требованием $M + \sum\limits_{\alpha=1}^{N}\eta_\alpha < 1/2$, если интервал $[a_N, \infty]$ физический. Сформулированные критерии эллиптичности и эрмитовости (последний гарантирует также нормируемость волновых функций) "работают" и для случаев $D < N-2$, которым соответствуют КТР модели конечного порядка.

Член $\vec{e}\vec{Y}(\lambda)$ в исходном $ТРСУ_{2N}(\Omega)$ можно интерпретировать как собственное значение операторнозначной функции $\vec{Q}^2(\lambda) = Q^+(\lambda)Q^-(\lambda) + Q^-(\lambda)Q^+(\lambda) + 2Q^0(\lambda)Q^0(\lambda)$, где $Q^-(\lambda) = S^-(\lambda)$, $Q^0(\lambda) = S^0(\lambda)$, $Q^+(\lambda) = S^+(\lambda) + i$, $\vec{S}(\lambda) = (\lambda - a_1)^{-1}\vec{S}_1 + \ldots + (\lambda - a_N)^{-1}\vec{S}_N$. Здесь $\vec{S}_a$ – образующие бесконечномерных неприводимых представлений алгебры SU(2) с z-проекциями спина, равными $-\eta_a$. Из коммутационных соотношений $[\vec{Q}^2(\lambda), \vec{Q}^2(\mu)] = 0$ следует, что $\vec{Q}^2(\lambda)$ является производящей функцией "гамильтонианов" магнетиков на алгебре $SU(2) \times \ldots \times SU(2)$ (N раз) Операторы L_a $(a = 1, \ldots, N)$, выступающие в качестве коммутирующих "гамильтонианов" (интегралов движения) магнетиков, являются вычетами в простых полюсах функции $\vec{Q}^2(\lambda)$. Собственные значения операторов L_a совпадают с собственными значениями операторов $l_a(a)$, получающихся из L_a отбрасыванием всех членов, действующих как понижающие операторы. Поэтому для построения алгебры скрытой симметрии G, обеспечивающей квазиточнорешаемость модели, необходимо найти операторы h_i (образующие этой алгебры), коммутирующие с какой-нибудь одной линейной комбинацией H операторов $l_a(a)$ и не коммутирующие с другими линейными комбинациями. Такие операторы существуют при $N \geqslant 3$ и соответствуют выбору $H = \Sigma a_a l_a(a)$. Действительно, оператор H не зависит явно от $a_1, \ldots, a_N$ и поэтому коммутирует со всеми операторами вида $l_a(a')$, где $a' \equiv \{a'_a\}$ не обязательно совпадает с $a \equiv \{a_a\}$. Поскольку при $N \geqslant 3$ не все линейные комбинации $l_a(a')$ коммутируют с операторами $l_a(a)$, то лишние (некоммутирующие) линейные комбинации и играют роль образующих h_i алгебры симметрии G. Попытки замкнуть эту алгебру убеждают нас в том, что она является бесконечномерной.

Гамильтонианы всех известных на сегодняшний день бесконечных серий КТР моделей с одним потенциальным спектральным параметром можно представить в виде $H = H^+(H^d - e) + H^0$, где H^+, H^d, H^0 – бесконечные блочные матрицы, $H^d_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}H^d_\alpha$, $H^+_{\alpha\beta} = 0$ и $H^0_{\alpha\beta} = 0$, соответственно, если $\alpha > \beta + 1$ и $\alpha > \beta$. Индексы α, β нумеруют блоки размером $K_\alpha \times K_\beta$. Если спектр матрицы H^d_M K_M -кратно вырожден, а e – собственное значение H^d_M, то спектральная задача для H становится конечномерной и мы приходим к КТР моделям $K_1 + \ldots + K_M$-го порядка (при $H^+ = 0$ возникает точнорешаемая модель). Пример: $H^0 = P_{ik}\partial_i\partial_k + Q_i\partial_i$, где P_{ik} и Q_i – произвольные полиномы второго и первого порядков, $H^d - e = t_i\partial_i - M$ или $(t_i\partial_i)^2 + a(t_i\partial_i) - M^2 - aM$, соответственно $H^+ = c_n t_n + d$ или $c_n t_n + d_{nmk}t_n t_m\partial_k + f_{nm}t_n\partial_m + g_n\partial_n$. Чтобы оператор H, имеющий вид $\tilde{P}_{ik}\partial_i\partial_k + \tilde{Q}_i\partial_i + \tilde{R}$, где $\tilde{R}$, $\tilde{Q}_i$ и $\tilde{P}_{ik}$ – полиномы, имел вид гамильтониана на многообразии с метрикой $\|g_{ik}\| = \|\tilde{P}_{ik}\|^{-1}$, функции $\tilde{P}_{ik}$ и $\tilde{Q}_i$ должны обеспечивать разрешимость уравнения $[\tilde{P}_{ik}\partial_k + \tilde{Q}_i + \partial_k\tilde{P}_{ik}]F = 0$ в классе полиномов F. Например, в двумерном случае $(H^+ = 0)$ решение этой задачи оказывается возможным, в частности, при $F = a(t_1^2 \pm t_2^2)^2 + b(t_1^2 + t_2^2) + c$.

Двумерные ТР и КТР модели рассматривались также в работах /8, 9/ в рамках иного подхода.

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 47 (1989)
2. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 134, М., 1988.
3. Натанзон Г. А. ТМФ, 38, 219 (1979).
4. Turbiner A. Comm. Math. Phys., 118, 467 (1988).
5. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 158, М., 1988.
6. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 190, М., 1988.
7. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
8. Shifman M., Turbiner A. Preprint ITEP 174, M., 1988.
9. Shifman M. Preprint CERN CH-1211, 1988.

Поступила в редакцию 23 декабря 1988 г.