Краткие сообщения по физике № 6-1989 г.

УДК 530.145

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

А.Г. Ушверидзе

Предложен алгебраический метод построения многомерных дифференциальных уравнений спектрального типа, имеющих конечное число точных решений.

В работе /1/ был предложен алгебраический метод построения многомерных дифференциальных уравнений спектрального типа, точно решаемых для нескольких значений спектрального параметра. В основе его лежало наблюдение, что образующие S_i конечномерных представлений алгебр Ли могут быть реализованы в виде дифференциальных операторов первого порядка на конечномерных пространствах полиномов от нескольких переменных. По этой причине любой оператор вида $H = \sum_{i,k} a_{ik}S_iS_k + \sum_i b_iS_i$ является дифференциальным оператором второго порядка, действующим в конечномерном линейном пространстве. Следовательно, спектральная задача для него является алгебраической и может быть решена точно.

В настоящей работе предлагается другой алгебраический метод построения многомерных дифференциальных квазиточнорешаемых уравнений произвольного порядка, основанный на использовании бесконечномерных представлений алгебр Ли и их деформаций.

Пусть $w_{n_1 \ldots n_R}$ – бесконечный набор конечномерных линейных пространств, $n_i = 0,\ldots,\infty$, $i = 1,\ldots,R$. Определим пространства $W_{n_1 \ldots n_R}$ как линейные оболочки пространств $w_{j_1 \ldots j_R}$ со всеми номерами $j_i \leqslant n_i$, $i = 1,\ldots,R$. Очевидно, что пространства $W_{n_1 \ldots n_R}$ с конечными номерами являются конечномерными. Бесконечномерное пространство $W_{\infty \ldots \infty}$, в которое вложены все упомянутые выше пространства, обозначим через W. Рассмотрим в W три типа операторов: 1) операторы H_i^N, переводящие любое пространство $W_{n_1 \ldots n_i \ldots n_R}$ в $W_{n_1 \ldots n_i + N, \ldots n_R}$, 2) операторы H^0, переводящие любое пространство $W_{n_1 \ldots n_R}$ в себя, и 3) операторы $\widetilde{H}_i$, кратные единичному на каждом из пространств $w_{n_1 \ldots n_i \ldots n_R}$ и обладающие свойством $\widetilde{H}_i \varphi = f_i(n_i)\varphi$, для всех $\varphi \in w_{n_1 \ldots n_i \ldots n_R}$. Сконструируем новый оператор H вида

$$H \equiv H^0 + \sum_{i=1}^{R} H_i^1 (\widetilde{H}_i - e_i^{11}) + \sum_{i=1}^{R} H_i^2 (\widetilde{H}_i - e_i^{21})(\widetilde{H}_i - e_i^{22}) + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{i=1}^{R} H_i^N (\widetilde{H}_i - e_i^{N1}) \ldots (\widetilde{H}_i - e_i^{NN}). \tag{1}$$

Число R назовем рангом оператора (1). Очевидно H действует из W в W и спектральная задача для него в общем случае является бесконечномерной. Однако, если значения параметров e_i^{nm} равны $f_i(M_i - m + 1)$, то H оказывается действующим внутри пространства $W_{M_1 \ldots M_R}$ и спектральная задача для него в этом пространстве становится конечномерной. Мы приходим к квазиточнорешаемому спектральному уравнению. Число точных решений этого уравнения равно, очевидно, размерности $W_{M_1 \ldots M_R}$.

Покажем, что операторы H^0, H_i^n и $\widetilde{H}_i$ могут быть построены из более простых операторов, являющихся образующими бесконечномерных представлений алгебр или супералгебр Ли и их обобщений. Пусть S_α^+, S_α^-, S_α^0, $\alpha = 1,\ldots R$ – операторы, удовлетворяющие соотношениям вида:

$$[S^0_\alpha, S^\pm_\beta] = \pm A_{\alpha\beta} S^\pm_\beta, \tag{2а}$$

$$f^+_{\alpha\beta}(S^0)\, S^+_\alpha S^-_\beta + S^-_\beta S^+_\alpha f^-_{\alpha\beta}(S^0) = f^0_{\alpha\beta}(S^0). \tag{2б}$$

Здесь $A_{\alpha\beta}$ — невырожденная матрица; $f^{\pm,0}_{\alpha\beta}(S^0) \equiv f^{\pm,0}_{\alpha\beta}(S^0_1,...,S^0_R)$ — произвольные ненулевые функции; $f^0_{\alpha\beta}(S^0) = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Предположим, что в пространстве W, в котором действуют эти операторы, существует конечномерное подпространство, которое мы обозначим через $|0, ..., 0\rangle$ и которое обладает свойствами:

$$S^-_\alpha|0, ..., 0\rangle = 0,\ S^-_\alpha|0, ..., 0\rangle = E_\alpha|0, ..., 0\rangle,\ \alpha = 1, ..., R. \tag{3}$$

Определим пространство $|n_1, ..., n_R\rangle$ как линейную оболочку всех пространств, полученных действием на $|0, ..., 0\rangle$ n_1 операторов S^+_1, n_2 операторов S^+_2, ..., n_R операторов S^+_R в произвольном порядке. Пользуясь коммутационными соотношениями (2), легко показать, что

$$S^\pm_\alpha\left\{\varphi \in |n_1,...,n_\alpha,...,n_R\rangle\right\} = \left\{\varphi' \in |n_1, ..., n_\alpha \pm 1, ..., n_R\rangle\right\}, \tag{4а}$$

$$S^0_\alpha\varphi = (E_\alpha + \sum_{\beta=1}^{R} A_{\alpha\beta}n_\beta)\varphi,\ \ \varphi \in |n_1, ..., n_R\rangle. \tag{4б}$$

Введя новые операторы $F_\alpha = \sum_{\beta=1}^{R} B_{\alpha\beta}(S^0_\alpha - E_\alpha)$, где $B_{\alpha\beta}$ — матрица, обратная к $A_{\alpha\beta}$, получим для них вместо (4б): $F_\alpha\varphi = n_\alpha\varphi$, $\varphi \in |n_1, ..., n_R\rangle$. Очевидно, что любую функцию от оператора F_α можно отождествить с оператором $\widetilde{H}_\alpha \equiv f_\alpha(F_\alpha')$, отождествив при этом пространства $|n_1, ..., n_R\rangle$ с пространствами $w_{n1} \cdots {}_{n_R}$. В качестве операторов H^0 можно взять любые операторы, являющиеся полиномами от $S^{\pm,0}_\alpha$, $\alpha = 1,..., R$, при условии, что число операторов S^+_α в каждом члене этого полинома не превышает число операторов S^+_α при любом α. В качестве операторов H^N_α можно использовать полиномы от S^+_α степени N, коэффициенты которых являются операторами типа H^0.

Описанная выше процедура позволяет также строить из операторов $S^{\pm,0}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., R$ различные операторы H рангов R', меньших, чем R. Рассмотрим в качестве простейшего примера случай, соответствующий значению $R' = 1$. Введем вместо R операторов F_α один $F = F_1 + ... + F_R$, имеющий во всех пространствах $|n_1, ..., n_R\rangle$ собственное значение $n_1 + ... + n_R$. Поэтому имеет смысл ввести новые пространства w_n, являющиеся линейными оболочками всех пространств $|n_1, ..., n_R\rangle$, для которых $n_1 + ... + n_R = n$, и отождествить некоторую функцию от оператора F с оператором $\widetilde{H}$, $\widetilde{H} = f(F)$. В этом случае в качестве операторов H^0 можно брать любые полиномы от $S^{\pm,0}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., R$ в членах которых общее число операторов рождения не превышает общего числа операторов уничтожения. При этом в роли операторов H^N могут выступать любые полиномы N-й степени от операторов рождения, коэффициенты которых являются операторами типа H^0. Все промежуточные случаи $1 < R' < R$ могут быть рассмотрены аналогично.

Для придания оператору H смысла дифференциального оператора необходимо найти дифференциальные представления для операторов, обладающих свойствами (2) и (3). В качестве простейшего примера рассмотрим алгебру операторов $S^+ = \lambda$, $S^- = \partial/\partial\lambda$, $S^0 \equiv S^+S^- = \lambda\partial/\partial\lambda$, удовлетворяющих соотношениям $[S^0, S^\pm] = \mp S^\pm$, $[S^-, S^+] = 1$. Положив $|0\rangle \equiv 1$, находим $|n\rangle = \lambda^n$. Поэтому $H^n = \sum_{k-j\leqslant n} a^n_{kj}\lambda^k\partial^j$, $n \geqslant 0$, $\widetilde{H} = f(\lambda\partial/\partial\lambda)$. Требование, чтобы H был оператором не более чем второго порядка, приводит к следующим двум его формам:

$$H = \sum_{k\leqslant l\leqslant 2} A_{kl}\lambda^k\partial^l + (B_1\lambda + B_2)\,[(\lambda\partial)^2 + C(\lambda\partial) - (M^2 + CM)],$$

$$H = \sum_{k \leq l \leq 2} A_{kl}\lambda^k \partial^l + (B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3)\,[\lambda\partial - M]\,[\lambda\partial - (M-1)] \,+$$

$$+ (C_1\lambda + C_2\lambda^2\partial + C_3\lambda\partial + C_4)\,[\lambda\partial - M].$$

Легко видеть, что $H = P_4\partial^2 + P_3\partial + P_2$, где P_2, P_3 и P_4 – полиномы соответственно второго, третьего и четвертого порядков. Модели, описываемые такими операторами, были рассмотрены в /2, 3/.

В качестве второго примера рассмотрим алгебру SL(3) ранга 2. Ее образующие $S_\alpha^{\pm,0}$, соответствующие двум простым корням, удовлетворяют коммутационным соотношениям (2а) и (2б), где $f^{\pm}_{\alpha\beta} = \pm 1$, $f^0_{\alpha\alpha} = S^0_\alpha$, $A_{\alpha\beta}$ – матрица Картана. Одно из возможных дифференциальных представлений для этих образующих имеет вид: $S_1^+ = \alpha x - x^2\partial/\partial x - xy\partial/\partial y - (xz - y)\partial/\partial z$, $S_2^+ = \beta z + y\partial/\partial x - z^2\partial/\partial z$, $S_1^- = \partial/\partial x$, $S_2^- = x\partial/\partial x + \partial/\partial z$, $S_1^0 = \alpha - 2x\partial/\partial x - y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$, $S_2^0 = \beta + x\partial/\partial x - y\partial/\partial y - 2z\partial/\partial z$. Здесь α и β – числа, характеризующие бесконечномерное представление. Положим $|0,0\rangle \equiv 1$. При этом $F_1 = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$, $F_2 = y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$. Поэтому H следует выбирать в виде $H = H^0 + H^1_1(F_1 - e_1) + H^1_2(F_2 - e_2)$, где H^0 является линейной комбинацией членов вида $S^+_\alpha S^-_\alpha$, $S^0_\alpha S^0_\beta$, $S^0_\alpha S^-_\beta$, $S^-_\alpha S^-_\beta$, S^0_α, S^0_β, а $H^1_\alpha = A_\alpha S^+_\alpha + B_\alpha$. Взяв другое представление, получающееся из предыдущего заменой $x \to \partial/\partial x$, $y \to \partial/\partial y$, $z \to \partial/\partial z$, $\partial/\partial x \to -x$, $\partial/\partial y = -y$, $\partial/\partial z = -z$, легко увидеть, что операторы S^-_α становятся дифференциальными операторами второго порядка, а оператор S^+_1 перестает быть дифференциальным. Все остальные остаются дифференциальными операторами первого порядка. Поэтому H можно взять в виде $H = H^0 + H^1_1(F_1 - e_1) + H^2_1(F_1 - e_1)(F_1 - e_1') + H^1_2(F_2 - e_2)$, где H^0 является линейной комбинацией членов вида $S^+_1 S^-_1$, $S^0_\alpha S^0_\beta$, S^0_α, S^-_α, а $H^1_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} (A_\alpha S^+_1 + B_\alpha) S^0_\alpha + C$, $H^2_1 = A'(S^+_1)^2 + B'S^+_1 + C'$, $H^1_2 = A''S^+_2 + B''$. Соотношения (2б) могут вырождаться как в коммутационные, так и в антикоммутационные, что позволяет в качестве порождающих алгебр использовать супералгебры Ли.

Согласно сделанному в /4/ наблюдению, любые из рассмотренных выше N-мерных квазиточнорешаемых уравнений $[\sum_{i,k=1}^{N} P_{ik}\partial^2/\partial x_i\partial x_k + \sum_{i=1}^{N} Q_i\partial/\partial x_i + R]\varphi = E\varphi$ могут быть сведены к $(N+1)$-мерным уравнениям Шредингера на кривых многообразиях. Для этого их вначале следует переписать в эквивалентной $(N+1)$-мерной форме $[\sum_{i,k=0}^{N} P_{ik}\partial^2/\partial x_i\partial x_k + \sum_{i=0}^{N} Q_i\partial/\partial x_i + R]\varphi = E\varphi$, оставив без изменения функции R, Q_i, P_{ik}, $i, k = 1, ..., N$, а также решения φ, E, и введя новые, произвольно зависящие от переменных x_i, $i = 1, ..., N$ функции Q_0, P_{0i}, $i = 0, .., N$. Затем нужно зафиксировать функцию U, обеспечивающую нормируемость φ, $\int U\varphi^2 d^{N+1}x < \infty$, и потребовать выполнение $N+1$ условий $\sum_{k=0}^{N} (P_{ik}\partial \ln U/\partial x_i + \partial P_{ik}/\partial x_i) = Q_i$, $i = 0, ..., N$. После фиксации функции P_{00} остальные $N+1$ функций Q_0 и P_{0i}, $i = 1,..., N$ находятся явно. После этого замена $\psi = (\det \|P_{ik}'\|)^{1/4} U^{1/2}\varphi$ сводит исходное уравнение к $(N+1)$-мерному уравнению Шредингера на многообразии с метрикой $\|g_{ik}\| = \|P_{ik}\|^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shifman M. A., Turbiner A. V. Preprint ITEP-174, Moscow (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 37 (1988).
3. Turbiner A. V. Comm. Math. Phys. 118, 467, 1988.
4. Ушверидзе А. Г. ЭЧАЯ, 20, в. 5 (1989).

Поступила в редакцию 16 февраля 1989 г.