Краткие сообщения по физике № 6-1989 г.

УДК 530. 145

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНОЙ ШРЕДИНГЕРОВСКОЙ ЗАДАЧИ

А.Г. Ушверидзе

Обсуждаются методы построения некоторых одномерных квазиточнорешаемых моделей.

В предложенном в /1/ методе построения квазиточнорешаемых (КТР) моделей определяющую роль играет система числовых уравнений $\sum\limits_{k=1}^{M}{}'(\xi_i - \xi_k)^{-1} + b(\xi_i) = 0$, $i = 1, \dots, M$, в которой $b(\xi)$ – рациональная функция, имеющая в невырожденном случае вид: $b(\xi) = \sum\limits_{a=1}^{N} b_a(\xi - a_a)^{-1}$, где $N, a_a, b_a, a = 1, \dots, N$ – некоторые задаваемые извне параметры. Любому решению $\xi^k \equiv \{\xi_i^k\}_{i=1}^{M}$ указанной системы можно сопоставить некое уравнение шредингеровского типа вместе со своим явным решением: $[-\partial^2 + V_k(x)]\Psi_k(x) = E_k\Psi_k(x)$ /1/. Зависимость потенциала $V_k(x)$ и энергии E_k от номера решения k дается явными формулами вида $V_k(x) = V(x, s_0(\xi^k), \dots, s_{N-3}(\xi^k))$ и $E_k = E(s_0(\xi^k), \dots, s_{N-2}(\xi^k))$, в которых $s_n(\xi^k) \equiv \sum\limits_{i=1}^{M}(\xi_i^k)^n$ – симметрические функции. При условии $\sum\limits_{a=1}^{N} b_a + M - 1 = 0$ потенциал от $s_{N-3}(\xi^k)$ не зависит /1/. Поэтому при $N = 3$ (а также при $N = 4$, если выполнено условие $\sum\limits_{a=1}^{4} b_a + M - 1 = 0$) потенциал зависит только от $s_0(\xi^k)$, т. е. от M, что приводит к КТР моделям, порядок которых определяется величиной M и равен, согласно /1/, $M - 1$. Если $N \geqslant 4$ и условие $\sum\limits_{a=1}^{N} b_a + M - 1 = 0$ не выполнено, то для построения КТР модели К-го порядка необходимо, чтобы для К каких-нибудь решений ξ^k с номерами $k = 1, \dots, K$ вся зависимость от k сосредоточилась в функции $s_{N-2}(\xi^k)$, а входящие в потенциал $s_1(\xi^k), \dots, s_{N-3}(\xi^k)$ не зависели от k. Ниже описан метод построения таких КТР моделей.

Рассмотрим невырожденный случай. Умножив уравнение $\sum\limits_{k=1}^{M}{}'(\xi_i - \xi_k)^{-1} + \sum\limits_{a=1}^{N} b_a(\xi_i - a_i)^{-1} = 0$ на $\xi_i^n \prod\limits_{a=1}^{N}(\xi_i - a_a)$, просуммировав по i и воспользовавшись формулой $\sum\limits_{i,k=1}^{M}{}'\xi_i^{n+1}(\xi_i - \xi_k)^{-1} = -(n+1)s_n/2 + (1/2)\sum\limits_{l=0}^{n} s_{n-l}s_l$, получим систему соотношений, выражающих s_n с $n > N-2$ через s_n с $n \leqslant N-2$. Другую систему такого же типа можно получить, заметив, что функции s_n с $n \geqslant M$ выражаются через функции s_n с $n \leqslant M$. Предполагая, что $M > N - 2$, и объединяя эти две системы, получим $N - 2$ уравнений вида

$$\sum_{n_1, \dots, n_{N-2}} f^i_{n_1 \dots n_{N-2}} s_1^{n_1} \dots s_{N-2}^{n_{N-2}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{N-2} j n_j \leqslant M + i, \quad i = 1, \dots, N-2, \tag{1}$$

полностью определяющих все возможные значения интересующих нас симметрических функций $s_1, \dots, s_{N-2}$. Каждое из равенств (1) является алгебраическим уравнением степени $K_i \equiv (M + i)/(N-2)$ относительно s_{N-2}

$$s_{N-2}^{K_i} + f_1^i s_{N-2}^{K_i - 1} + \dots + f_{K_i}^i = 0, \quad i = 1, \dots, N-2. \tag{2}$$

Коэффициенты f^i_k этих уравнений зависят от M, N, a_α, b_α, $\alpha = 1, \dots, N$ и от $s_1, \dots, s_{N-2}$. Для того, чтобы при фиксированном наборе значений $s_1, \dots, s_{N-2}$ каждое уравнение (2) имело по крайней мере K различных решений, необходимо, чтобы неравенство $(M + i)/(N - 2) \geqslant K$ выполнялось для всех $i = 1, \dots, N - 2$. Отсюда возникает ограничение $M \geqslant K(N-2) - 1$. Если $M = K(N-2) - 1$, то степень всех уравнений одна и та же и равна K. Для совместности всех этих уравнений необходимо потребовать совпадения их коэффициентов

$$f^i_1 = f^i_2 = \dots = f^i_{N-2}, \quad i = 1, \dots, K, \tag{3}$$

что возможно при наложении $K(N-3)$ условий на $3N - 5$ величин. ($N - 3$ величин s_i, N величин b_α и $N - 2$ величин a_α; два параметра a_α могут быть зафиксированы произвольным образом в силу трансляционной и масштабной инвариантности системы (3).) Отсюда находим ограничение $K \leqslant 3 + 4/(N-3)$ на порядок КТР модели (это ограничение было получено ранее другим способом в /1/).

Построим в качестве примера КТР модель второго порядка ($K = 2$), характеризующуюся вырожденной функцией $b(\xi)$ вида $b(\xi) = \alpha\xi^{-1} - \beta - \gamma\xi - \xi^2$. В данном случае $M = 3$, $N = 4$, поэтому (2) представляет собой систему из двух квадратных уравнений относительно s_2. Коэффициенты этих уравнений зависят от α, β, γ и s_1. В нашем распоряжении имеется достаточное число параметров, поэтому для определенности положим $s_1 = 0$, приведя эту систему к виду $s_2^2 - 2(\gamma^2 - \beta)s_2 + 3\gamma(\alpha + 1) = 0$, $s_2^2 + (6/5\gamma)\,[2\beta\gamma - \gamma^3 - 3\alpha/2 - 1]\,s_2 + (18/5\gamma)(\gamma^2 - \beta)(\alpha + 1) = 0$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s_2, находим, что $\alpha = (8/27)\gamma^3 - 2/3$, $\beta = -(2/3)\gamma^2$. Потенциал построенной модели имеет вид

$$V = 4x^{10} + 8\gamma x^8 - \frac{4}{3}\gamma^2 x^6 - \left(\frac{208}{27}\gamma^3 + \frac{80}{3}\right)x^4 - \left(\frac{16}{27}\gamma^4 + \frac{68}{3}\gamma\right)x^2 +$$

$$+ \left(\frac{16}{27}\gamma^3 - \frac{11}{6}\right)\left(\frac{16}{27}\gamma^3 - \frac{17}{6}\right)\frac{1}{x^2},$$

а решения даются формулой

$$E_\pm = -\frac{32}{81}\gamma^5 + \frac{80}{9}\gamma^2 \pm 8\sqrt{\gamma^4 - 2\gamma}\,.$$

Используя электростатическую аналоговую задачу /1/, нетрудно показать, что найденные уровни описывают первое и второе возбужденные состояния. Гамильтониан построенной модели в результате замены переменной и преобразования подобия $H \to SHS^{-1}$ (S – функция координат) не может быть приведен к блок-диагональному виду. Однако это возможно, если в качестве S взять оператор, содержащий производные по x сколь угодно высокого порядка. Такой оператор нетрудно построить явно, если заметить, что гамильтониан модели в базисе функций вида $x^{2n + \alpha - 1/4}\exp(-x^6/3 - \gamma x^4/2 - \beta x^2)$ имеет вид бесконечной матрицы, которая приводится к блок-диагональному виду с помощью преобразования подобия, действующего лишь на конечное число ее строк и столбцов. Очевидно, что матрица такого преобразования может быть представлена лишь в виде дифференциального оператора бесконечного порядка.

Продемонстрируем возможность использования таких дифференциальных преобразований подобия на примере процедуры размножения КТР моделей, обсуждавшихся независимо в работах /2/ и /3/. Вначале докажем эквивалентность этих процедур. Процедура работы /2/ формулируется следующим образом. Пусть дано уравнение Шредингера $(-\partial^2 + V)\Psi_n = E_n\Psi_n$, точнорешаемое для K состояний ($n = 1, \dots, K$). Преобразуем его к риккатиевой форме: $y_n' + y_n^2 + E_n = V$. Перейдя к новым функциям $\tilde{y}_n$, связанным со старыми y_n дробно-линейным преобразованием $\tilde{y}_n = -(E_n - E_0)/(y_n - y_0) - y_0$, получим другое уравнение Риккати вида $\tilde{y}_n' + \tilde{y}_n^2 + E_n = \tilde{V}$, где $\tilde{V} = y_0^2 - y_0' + E_0$. Из этого уравнения можно получить уравнение Шредингера

$(-\partial^2+\widetilde{V})\widetilde{\Psi}_n = E_n\widetilde{\Psi}_n$, имеющее столько же точных решений, сколько и исходное /2/. Из полученных формул следует, что $V - E_0 = y_0^2 + y_0'$ и $\widetilde{V} - E_0 = y_0^2 - y_0'$, поэтому потенциалы V и $\widetilde{V}$ являются суперпартнерами в виттеновской суперсимметричной квантовой механике. Тем самым устанавливается полная эквивалентность результатов, получаемых в рамках подходов работ /2/ и /3/. Подход работы /3/ привлекателен тем, что он позволяет сразу отсекать ненормируемые решения, которые в нем просто не возникают. Именно по этой причине в /3/ КТР моделям К-го порядка ставятся в соответствие КТР модели (К – 1)-го порядка (а не К-го, как в /2/). Подход работы /3/ можно переформулировать на аналитическом языке, если представить гамильтониан H первой модели в виде $H = (y_0+\partial)(y_0-\partial)$. Ясно, что переход от первой модели ко второй, с гамильтонианом $\widetilde{H}$, может быть осуществлен преобразованием подобия $H \to SHS^{-1} = \widetilde{H}$, где $S = y_0 - \partial$ – дифференциальный оператор первого порядка. Это позволяет поставить вопрос более широко. Пусть $H = -\partial^2 + V$ – гамильтониан точно- или квазиточнорешаемой модели. Попытаемся выяснить, можно ли с помощью преобразования подобия, осуществляемого дифференциальным оператором n-го порядка $S = \partial^n + A_1\partial^{n-1} + \ldots + A_n$, получить гамильтониан $\widetilde{H} = -\partial^2 + \widetilde{V}$ другой точно- или квазиточнорешаемой модели. Для этого необходимо решить уравнение

$$(\partial^n + A_1\partial^{n-1} + \ldots + A_n)(-\partial^2 + V) = (-\partial^2 + \widetilde{V})(\partial^n + A_1\partial^{n-1} + \ldots + A_n) \quad (4)$$

относительно неизвестных функций $\widetilde{V}$, A_k, $k = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что количество неизвестных совпадает с количеством налагаемых на них условий, получающихся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ∂ в левой и правой частях (4). Например, в случае $n - 2$, решая полученную систему, находим: $\widetilde{V} = V + 2A_1'$, $A_2 = -(V+e) + (A_1^2 - A_1')/2$, где функция A_1 удовлетворяет уравнению $(A_1^2 - A_1')''/2 - A_1'(A_1^2 - A_1') + 2A_1'(V+e) + A_1V' = 0$. Здесь e – произвольное число. Таким образом, задача построения новых КТР уравнений, точно решаемых для сколь угодно больших участков спектра, сводится к решению всего одного дифференциального уравнения. Можно показать, что некоторые точно- или квазиточнорешаемые модели в результате преобразования (4) переходят в другие известные модели тех же типов. Например, $V = ax^2$ переходит в $V = ax^2 + b/x^2$; $V = a/\mathrm{ch}^2 x$ переходит в $V = a/\mathrm{ch}^2 x + b/\mathrm{sh}^2 x$, $V = ax^6 + bx^2$ переходит в $V = ax^6 + cx^2 + d/x^2$. Однако для большинства моделей построение партнеров по преобразованию (4) является отнюдь не тривиальной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 47 (1989).
3. Shifman M. A. Preprint CH-3012, Bern, December 1988.

Поступила в редакцию 16 февраля 1989 г.